

Prof. dr. doc. FLORICA T. CÂMPAN

LICURICII DIN ADINCURI

sau

*Convorbiri despre fundamentele
matematicii*

Coperta de DAN STANCIU

Prof. dr. doc. FLORICA T. CAMPAN

LICURICII DIN ADÎNCURI

sau

**Convorbiri despre
fundamentele matematicii**



EDITURA ALBATROS

BUCUREȘTI, 1983

Referent științific:

prof. univ. dr. docent SOLOMON MARCUS

Surorii mele

*Aneta
Munteanu,
suflet din
sufletul rmxw*

HODORONC-TRONC : FILOSOFIE !

Eram singur în camera din dreapta a Bibliotecii Seminarului Matematic „Alexandru Myller” din Iași, aceea în care se găsesc enciclopediile, dicționarele, revistele de referate, rapoartele congreselor matematice, colecțiile separatelor ș.a. Căutam un volum din „Separata B”, cocoțat pe o scară și ascuns de două dulapuri, când am auzit o voce bine cunoscută, aceea a profesorului Teodor I. Toader, fostul meu coleg de facultate, acum pensionar i

— Vezi că am avut dreptate când ți-am propus să vii aici ? Deocamdată nu văd pe nimeni, așa că putem discuta în voie ! Mai ales că vreau să-ți spun pe șleau că nu mi-a plăcut deloc exagerarea ta cu : „o dramă pasionantă”!

— Dar n-am exagerat deloc, stimate profesor, a răspuns dîrz nepotul meu. Ion Dan, zis Nucu. Fusesse elevul colegului meu, care i-a cultivat dragostea lui pentru matematică și acum, de cînd a fost numit asistent la Facultatea de matematică, se întîlneau adesea în această bibliotecă, de care eram cu toții legați.

— De ce adică, l-am auzit continuînd, n-aș avea voie să consider o problemă ca fiind „o dramă pasionantă”? Oare numai conflictele sentimentale au dreptul la această denumire, iar acelea provocate de părerile și gîndurile matematicienilor, nu ? Dacă ați ști cîte drame pasionante am descoperit de cînd am libertatea să răsfoiesc cărțile și

revistele acestea, oricînd am timp și gust ! Ba, mi s-a întîmplat să rămîn cu biletul cumpărat cu trudă pentru un spectacol, fiindcă îl uitam, prins de vraja argumentelor *pro* și *contra*, susținute cu înverșunare cînd de un matematician, cînd de altul ca să convingă adversarul de temeinicia punctului

său de vedere. Și, în clipa când răsuflăm satisfăcut, considerând problema lămurită, găseam un nou articol, apărut în ultimul număr al vreunei reviste, carte răsturna iarăși toate argumentele ce-mi păruseră hotărâtoare...



**Universitatea din Iași.
Biblioteca
Seminarului „Al. Myller”**

— Vorbești frumos și cu patos, dragă Nucule, numai că eu îs prea bătrân ca să mă m^î las încântat de vorbe dulci! Mie trebuie să-mi arăți clar despre ce-i vorba în „drama aceea pasionantă” pe care ai descoperit-o în volumul lui Poincare, cu care erai în mînă, acolo la raft, cînd ne-am întîlnit.

— Asta doresc și eu, dacă vrei să discutăm ! Această ultimă dramă, pe care o consider pasionantă și care mă pasionează acum, este *problema raționamentului matematic* ! Gîndiți-vă numai la faptul că au trecut peste două mii de ani de cînd matematicienii stabilesc atîtea teoreme și teorii admirabile și au scris atîtea mii de volume, în care le expun și le demonstrează, și totuși, pînă azi nimeni nu poate da un răspuns precis la

întrebarea : *care-i natura raționamentului matematic ?* îndată ce se pune această întrebare, se dezlănțuie atîta neliniște de parcă ar fi vorba să explodeze o bombă cu neutroni. Neînțelegerile sînt vechi, dar ele s-au accentuat și mai mult din secolul al XIX-lea, de cînd cercetările s-au îndreptat spre structura matematicii și a metodelor ei proprii de a stabili adevărurile matematice, adică spre studiul fundamentelor matematicii. E dea] uns să vă amintesc numai de trei curențe importante: *logicismul*, *formalismul* și *intuiționismul*, căci mai sînt și altele, pentru care studiul fundamentelor a devenit mărul discordiei. Logiciștii afirmă că logica și matematica înseamnă unul și același lucru, deși nu se înțeleg pe deplin între ei, fiindcă unii consideră că logica se reduce la matematică, iar alții că matematica se reduce la logică ! Oricum, de comun acord, au creat un nou obiect, pe nume *logica matematică*, sau *logistica*, sau *logica simbolică*. Formaliștii nu sînt de acord cu părerea logiciștilor. Ei susțin că matematica este *un joc*, o manipulare formală de simboluri și folosesc logica matematică numai ca pe un instrument capabil să stabilească și să precizeze consistența jocului, cu alte cuvinte ca să dovedească imposibilitatea contrazicerii dintre regulile jocului. În fine, intuiționiștii, care combat unele din tezele logiciștilor și ale formalistilor, consideră că matematica este o activitate ireductibilă a spiritului omenesc, condusă de intuiție.

— Dar bine, bre omule, nu-ți ajunge că ai la îndemîină această bibliotecă minunată, cu atîtea cărți și reviste în care raționamentul matematic se lăfaie în voia lui, fără să-i pese de nici o adiere de vînt ? N-ai mai găsit alte probleme, de geometrie, de analiză, din teoria numerelor, care să te pasioneze, și să nu umbli după cai verzi pe pereți ?

Discuția mă amuza, așa că am ieșit de după dulapurile ce mă ascundeau și m-am amestecat în vorbă :

— Am auzit ce-i spuneai lui Nucu și mi-a venit să rîd, dragă Teodor ! Se vede că nu cunoști meteahna

nepotului meu : de cînd a dat de şurubelniţă n-a mai rămas jucărie nedesfăcută. La rînd a urmat ceasul şi nu de mult l-am găsit meşterindu-şi magnetofonul.

— Adevărat, Bădie. Abia după ce desfac un lucru şi îl fac la loc, nu-mi mai este străin şi-l îndrăgesc cu adevărat. Tot aşa s-a întîmplat şi cu articolul lui Poincare asupra naturii raţionamentului matematic. M-a pasionat, iar după ce am citit o parte din literatura legată de acest subiect, mă dusesem din nou la raft să-l mai citesc odată, şi atunci a venit stimatul meu profesor. I-am spus adevărul şi ai auzit cum m-a luat peste picior !

— Am auzit, de aceea am şi venit, ca să-ţi iau apărarea. Cred, dragă Toa, că de data asta are Nucu dreptate. Cînd cauţi calea pe care a urmat-o un gînd ca să stabilească un anume adevăr matematic, nu-ţi vine să te-ntrebi de ce a ales-o pe aceasta şi nu altă cale? Pe ce s-a bazat alegerea? Sau, de ce au fost preferate anumite probleme de studiu şi nu altele, anumite axiome sau anumiţi termeni primitivi şi nu alte axiome, alţi termeni primitivi ?

— Am citit undeva, Bădie, că logicianul A. Tarski susţineau că, de obicei, nu decid consideraţiile de ordin teoretic, ci, mai degrabă, acelea de ordin practic, didactic sau estetic. Eu le-aş adăuga şi pe acelea de ordin sentimental !

— Exact ! Țin însă sa va atrag atenția că asemenea întrebări, însoțite tot de răspunsuri contradictorii, nu se găsesc numai în cazul problemei despre natura raţionamentului matematic. În cartea tipărită de regretatul profesor Ernest Stere: *Istoria filosofiei antice și moderne* (1) am citit că, după ce grecii au creat termenul *filosofie*, cu înțelesul clar de *iubire de înțelepciune*, s-au găsit îndată alți filosofi, tot greci, care să mai pună și alte întrebări despre înțelesul acestui cuvînt și astfel, din răspunsurile lor au rezultat o sumedenie de teorii, care se contrazic între ele, de atunci și pînă acum.

— Frumos, numai că prin această observație a

ta, interesul pentru problema pusă de Nucu nu s-a micșorat, ci așa spune că a crescut. De pildă, eu aș mai adăuga la întrebarea despre natura raționamentului matematic și pe aceea despre natura noțiunilor matematice ! Și dacă primești discuția, aș lua și eu parte, bucuros la ea, căci m-ar interesa să cunosc acest capitol din istoria matematicilor, țesut din răspunsurile găsite de Nucu la problema care l-a prins în mrejele ei 1

— Desigur, și mă bucură să ni te alături, dar țin să-ți amintesc că după părerea lui Andre Malraux „istoria este istoria succesiunii întrebărilor și nu a succesiunii răspunsurilor” ! !

— Îmi place răspunsul, stimat profesor, și m-ați ajutat mult cu acest citat, căci eu nu am de gând să fac *istorie*, ci *filosofie* !

— Cum ? Așa, hodoronc-tronc, filosofie ?

— Da, și pînă nu vă răzgîndiți, eu am să alerg ca să aduc de alături *La Science et l'Hypothèse* (2), căci cu ea în față vreau să începem discuția noastră.

— Frumoasă carte, am zis, în timp ce Nucu se îndepărta. Deși a fost scrisă la începutul veacului, nu și-a pierdut nimic din prospețime, pe cînd altele, apărute cu 10—15 ani în urmă, nu-ți mai vine să le citești.

— Observația ta mă duce la o alta, pe care am reținut-o din cartea lui Georges Poulet: *Conștiința critică*. (3) Anume, scria el că, atîta timp cît o carte stă pe masă sau în raftul unei biblioteci, ea nu reprezintă decît un obiect de hîrtie, dar cînd ai deschis-o și începi să o citești, obiectul de hîrtie dispare, deși a rămas prezent, ca să ți se înfățișeze înaintea ta o ființă dotată cu rațiune, o conștiință, care-ți permite să-i cunoști gîndurile, ideile, ba chiar și să *gîndești cu gîn*?- *direa ei* !

— Iată cartea lui Poincare cu articolul meu, care începe cu această sclipitoare dilemă pe care vreau să v-o citesc.



Jules Henri Poincaré

a spus Nucu, întrerupându-ne : „însăși posibilitatea științei matematice pare o contradicție insolubilă. Dacă această știință nu-i deductivă decât în aparență, de unde-i vine acea rigoare perfectă de care nu se îndoiește nimeni ? Dacă, din contra, toate propozițiile pe care le enunță se pot deduce unele din altele, prin regulile logicii formale, cum de nu se reduce matematica la o imensă tautologie ? Silogismul nu ne poate învăța nimic esențial-nou și dacă totul decurge din principiul identității, ar trebui ca totul să se reducă la el. Putem oare admite că enunțurile tuturor teoremelor cu care sînt umplute atîtea volume, să nu fie decât modalități diferite de a spune că A este A Nu numai în acest loc, dar și în multe altele, îi hărțuia Poincare pe logicienii care afirmău că raționamentul matematic este o tautologie, și pe formalisti, cărora le arăta că matematica nu se putea reduce la un joc de șah, fiindcă acesta nu îndeplinea condițiile care i-ar fi dat dreptul să fie o știință.

— După mine, unul, avea dreptate. Nici eu nu-mi pot închipui că în matematică, formula $A = A$ s-ar putea reduce la o tautologie, goală de conținut. Să admit, de exemplu, că notez cu A suma unghiurilor dintr-un triunghi, și tot cu A mărimea a două unghiuri drepte. $A = A$ exprimă atunci teorema

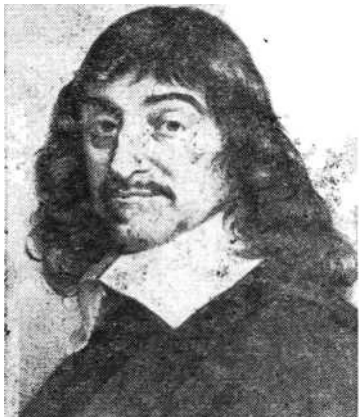
: „suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte". Acest adevăr nu-i o tautologie, ci o creație matematică, pe care am stabilit-o nu numai pe baza unor scheme formale, ci și printr-o demonstrație !

— În această privință a intervenit profesorul Toader, meritul este al geometriilor greci, care au transformat matematica într-o știință deductivă. În special, caracterul deductiv al raționamentului matematic a fost pus în evidență de Aristotel; el a arătat că propozițiile demonstrate se bazează unele pe altele, iar dintre acestea unele sînt admise fără demonstrație; totodată că între termenii cuprinși într-o propoziție matematică, unii sînt *primitivi*, adică se prezintă ca *noțiuni nedefinite*, iar ceilalți, *termenii definiți*, se bazează pe acești termeni primitivi.

— N-aș putea spune dacă Poincare a stabilit cire-i natura raționamentului matematic, dar știu bine că el a căutat să atragă atenția asupra faptului că raționamentul matematic ;,are în el însuși un fel de virtute creatoare prin care se deosebește de silogism".

— În privința silogismului, s-ar cuveni, cred, să-l considerăm îndeaproape, fiindcă, oricare ar fi părerea voastră, unchi și nepot, nu există demonstrație matematică în care să nu apară silogismul!

— Nu te contrazic, dragă prietene, dar după cum bine știi, Aristotel însuși a remarcat că nu orice silogism înseamnă o demonstrație ! Și chiar din Antichitate s-au găsit destui filosofi care să-i conteste valoarea, arătînd că el *nu ne învață nimic esențial-nou*. N-am decît să-ți amintesc de stoici, care afirmau că mecanismul silogismului este un *cerc vicios* care lasă numai impresia că ar stabili o demonstrație !



Rene

— Dați-mi și mie voie, stimate profesore, să prezint pledoaria lui Descartes împotriva silogismului. El spunea că, în orice știință, deducerea adevărului trebuie să se facă după modelul raționamentului matematic și nu pe baza logicii formale legată de teoria silogismului. Descartes a arătat că diferența esențială dintre silogism și raționamentul matematic constă în faptul că, silogismul, bazându-se pe premise univesale, stabilește o concluzie tot universală, pe când în raționamentul matematic intervine și faza intermediară de contemplare a unui obiect individual. Or, tocmai în această fază intermediară apare intuiția, care nu se poate referi decît la obiecte particulare și, prin aceasta, raționamentul matematic se deosebește de silogism. Ca să fie mai clar faptul că intuiția se bazează pe obiecte concrete, am să mă refer la propoziția a cincea a lui Descartes, pe care am găsit-o zilele trecute citată în cartea lui Beth și Piaget. (4, p. 7) Anume, el spune că dacă-mi imaginează un triunghi, deși acesta nu se află nicăieri, decît în mintea mea, el are o formă determinată care nu-i inventată de mine și nici nu depinde de spiritul meu. Prin construirea acestui triunghi în mintea mea, eu pot să descopăr diferite proprietăți pe care le au triunghiurile și la care eu nu mă gîndisem mai înainte. Bazîndu-se pe acest fel de raționament intuitiv, Descartes susținea că

deducerea adevărului trebuia să se bazeze pe alte adevăruri, precizate anterior. Și, pentru a stabili adevărurile *certe și autentice*, cum le numea Descartes, el a fixat patru reguli, pe care le-am învățat pe de rost. Iată-le :

1. Să nu accepți niciodată un lucru ca adevărat, dacă nu l-ai cunoscut în mod evident, adică să nu existe nici un prilej ca să te-ndoiești de el.

2. Să împărți dificultățile în mai multe părți, atâtea cîte sînt necesare ca ele să poată fi rezolvate.

*. Să-ți conduci gîndurile în ordine, începînd de la cele simple către cele complexe.

4. Să faci enumerări cît mai complete și recapitulări generale, ca să nu uiți nimic."

— Foarte frumos, numai că atunci cînd Descartes s-a întrebato care adevăruri pot fi recunoscute ca fiind *certe*, pentru ca din ele să poată deduce pe celelalte, mi se pare că a cam încurcat-o !

— Nu sînt de părerea dumneavoastră, dragă profesore. Oare acel celebru : „gîndesc *deci exist*”, nu înseamnă nimic ?

— Cum să nu ! Doar de aici a tras concluzia că „lucrurile pe care le concepem foarte clar și distinct sînt toate adevărate”. Numai că, iarăși, i-a fost cam greu să decidă ce s-ir putea socoti că-i *clar și distinct* ?

— Dar de ce-mi necăjești atîta nepotul, mă rog ? Știi bine că Descartes a considerat că adevărurile cu asemenea calitate rezultă numai din *intuițiile rațiunii* și a precizat că asemenea intuiții nu-și au originea în simțuri. Adevărurile clare și distincte, spunea el, sînt descoperite de minte în mod nemijlocit și fără demonstrații, printr-o cunoaștere intuitivă care are la bază rațiunea și nu experiența ! Asta fiindcă experiența poate induce în eroare.

— Ai dreptate, Bădie. Raționalismul creat de Descartes se bazează pe aceste principii. „în matematică”, spunea el, „adevărurile se deduc în mod succesiv prin raționament, demonstrația matematică este formată dintr-un lanț de judecăți și deduceri, și nu din concluziile trase din analiza re-

lațiilor formate din cele trei noțiuni cerute de silogism'-. Lui îi datorăm forma modernă a logicii, în care raționamentul apare ca o înțelegere a raporturilor dintre obiectele în sine. El susținea că am putea stăpîni natura dacă am înlocui filosofia speculativă cu una practică, în care să se prezinte puterea și acțiunea focului, a apei, a aerului precum și a tuturor lucrurilor ce ne înconjoară.

— N-am să te mai contrazic, căci văd că* te-ai aprins rău de tot ; țin doar să adaug că în Evul Mediu *logica* sau *teoria despre gîndire* era privită de *scolastici* ca știința cea mai bine întocmită și chiar Descartes nu o considera lipsită de certitudine !

— Desigur, dragă profesore, de aceea a și afirmat el că majoritatea regulilor ei servesc să explice altuia lucrurile bine cunoscute " sau „ca să vorbească fără a judeca despre lucruri necunoscute" ! Dacă n-ar fi făcut decît aceste două observații, tot ar fi meritat admirația și dragostea mea, pe care țin să o mărturisesc aici !

— Ei ! Ce mai zici, dragă Toadere ? Te-a dat gata, Nucu ? Mai ai ce-i replica ?

— Știu și eu ? Poate că] nestatornicia tinereții. A alergat cu sufletul la gură ca să ne aducă aici cartea lui Poincare și, plin de entuziasm, a început să ne citească din ea. Apoi, dintr-o dată a lăsat totul baltă ca să-i facă o declarație de dragoste lui Descartes !

— Asta-i cam așa, o recunosc și eu ! Dar simțeam nevoia să-l reabilitez pe Descartes și să repar nedreptatea pe care i-au făcut-o contemporanii care, neînțelegîndu-l, îi analizau raționamentele în mod silogistic și susțineau că toate concluziile lui sînt absurde ! E adevărat că de atunci și pînă la Poincare au trecut peste două veacuri, timp în care

raționamentul matematic și-a găsit destui șlefuitori. În cartea lui Beth, despre care v-am vorbit adineauri, am găsit această frază ce mi-a plăcut mult: „Azi este permis să se considere ca definitiv faptul că raționamentul matematic, așa cum s-ar prezenta, de exemplu, într-o versiune perfecționată a *Elementelor* lui Euclid, nu mai poate fi reprezentat ca un șir de silogisme aparținând sistemului lui Aristotel”. Și știți de ce ? Pentru că logica lui Aristotel trebuia lărgită, deoarece teoria silogismului nu ne mai prezintă o analiză completă



a raționamentului matematic !

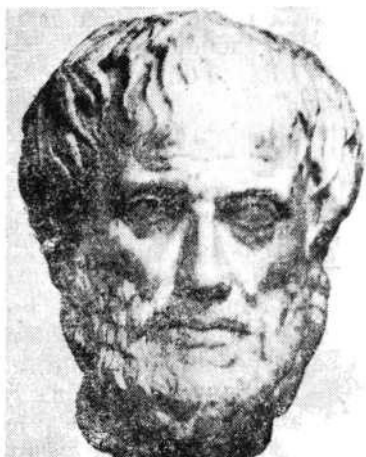
— Într-un articol intitulat „Invenția matematică” (5), Poincare arată că o demonstrație nu constă numai dintr-un șir de silogisme, ci și din ordinea în care sînt așezate. Ba, ceea ce ar părea paradoxal, ordinea în care sînt așezate aceste silogisme *este mai importantă* decît silogismele însăși ! Aceasta pentru că dacă ai intuiția acestei ordini și poți vedea dintr-odată întregul raționament matematic, fiecare silogism se așază de la sine acolo unde-și are locul.

— Cunosc și eu acest articol. Se mai afirmă în el că acea intuiție a ordinii matematice nu poate aparține oricui, ci numai acelor care au talent

matematic I

— Desigur, fiindcă Poincară era încredințat că „te naști matematician și nu devii”, după ctim : „te naști geometru sau te naști analist”. (6)

— Acum prevăd, stimată profesore, că mă veți acuza din nou că sar de la una la alta, dar nu pot rezista tentației de a vă povesti cum m-a făcut Bădia să admir eu cărțile lui Poincare, de când eram în clasa I elementară și de atunci mi-a stîrnit curiozitatea, să le citesc.



Aristotel

— Ce aiureală ai mai scornit, mă rog ?

— Aiureală, spui mata, acum ? Atunci parcă era „point” și „carre” !

— Acum chiar că mă faci să rîd. Mai ții minte povestea aceea ?

— Dar cum era să o uit ? Tocmai de aceea vreau să povestesc cum l-am cunoscut eu pe Poincare. Bădia a început să mă învețe unele cuvinte franțuzești înainte de a merge la școală și, când eram în clasa întâi elementară, ajunseseam să le și scriu. Odată, când m-am urcat sus, la dumnealui în cameră, citea o carte și când m-a văzut, s-a încruntat așa de tare că m-am speriat, gîndindu-mă că am făcut cine știe ce poznă și acum am să-mi

primesc pedeapşa. Dar el nu spune nimic, ci îmi face semn să mă apropiu. Apoi ia un creion de pe birou şi desenează un pătrat cu un punct în mijloc. După ce-mi arată figura, îmi zice : Spune pe franţuzeşte ce-i asta ? Şi, cu vârful creionului îmi arată punctul.

— *Point*, îi răspund eu.

— Şi figura ?

— *Carre* !

— Bine, acum spune la un loc aceste două cuvinte !

— Nedumerit la culme, am spus : *pointcarre* şi am repetat cuvîntul de cîteva ori.

Atunci unchiul meu a luat cartea pe care o citea — o văd şi acum, avea tartajele portocalii, nu negre ca acestea legate din bibliotecă —, şi mi-a arătat-o. — Priveşte ce scrie aici sus : H. Poincare. Vezi ? Să nu uiţi acest nume • că este al unui mare matematician şi cînd ai să fii student, poate că are să-ţi placă şi ție să citeşti aceste cărţi care-mi plac mie foarte tare !

— N-am să-1 uit ! am răspuns eu, dar de ce a uitat el să-1 pună pe „t”, am adăugat tot nedumerit, la care unchiul n-a ştiut ce să spună şi a deschis sertarul în care stătea ascunsă comoara mea de bomboane. Şi acum iată de ce, din cauza acestor aiureli mă mai duc odată să aduc şi cărţile pe care sper să le răsfoim, aici.

— Le-am adus, a spus Nucu, şi am mai adăugat una, publicată la noi, de care prevăd că nu ne vom putea lipsi, dacă ne-am hotărît să discutăm problema raţionamentului matematic. Aici, în articolul despre „Intuiţia şi logica matematică”, Poincare merge mai departe decît o făcuse în acela asupra naturii raţionamentului matematic. Mai întîi, am să citesc cîteva rînduri, le-aş zice premergătoare celor ce urmărim noi, în care el se întreabă „ce este realitatea” ? şi răspunde : „Fiziologii ne arată că organismele sînt formate din celule : chimiştii adaugă că celulele sînt formate din atomi. Atomii sau celulele constituie realitatea

sau cel puțin singura realitate ? Modul în care sînt aranjate aceste celule și din care rezultă unitatea individului, nu-i, de asemenea, o realitate mult mai interesantă decît aceea a elementelor izolate ?... Ei bine, în matematică este ceva analog. Logicianul descompune fiecare demonstrație într-un foarte mare număr de operații elementare ; după ce vor fi examinate aceste operații, unele după altele, și se va constata corectitudinea lor, va fi înțeles oare și adevăratul sens al demonstrației ? Va fi înțeleasă chiar dacă, după un efort al memoriei, ar putea fi repetată această demonstrație, re- producînd toate operațiile elementare în însăși ordinea în care le-a pus inventatorul ? Evident nu, noi nu posedăm încă întreaga realitate, iar acel ceva care dă unitate demonstrației, ne va scăpa complet... Ne trebuie o facultate care să ne facă să vedem de departe scopul și această facultate este intuiția. Ea este necesară exploratorului ca să aleagă drumul și nu mai puțin aceluia care urmează această cale și vrea să știe de ce a ales-o... logica ne-o poate oferi ? Nu, o dovedește numele ce i-au dat-o matematicienii. În matematică logica se numește *Analiză* și analiză înseamnă *împărțire, disecție*... Așa că, logica și intuiția au fiecare rolul lor necesar. Amîndouă sînt obligatorii. Logica, singura care dă singuranță, este instrumentul demonstrației, intuiția este instrumentul invenției". Mai încolo, Poincare se referă la articolul cu care am început noi discuția : „într-unul din capitolele din *Știința și ipoteza* am avut ocazia să studiez natura raționamentului matematic și am arătat cum acest raționament, fără a înceta de a fi absolut riguros, ne poate ridica de la particular la general printr-un procedeu pe care l-am numit *inducția matematică*. Prin acest procedeu analiștii au făcut să progreseze știința și dacă examinăm detaliul însuși al demonstrațiilor lor, îl vom afla în fiecare moment alături de silogismul clasic al lui Aristotel". Poincare consideră că *inducția matematică*, adică acest *raționament prin recurență*, posedă virtutea creatoare a raționamentului matematic, fiindcă *el*

condensează, într-o formulă unică, o infinitate de silogisme.

— Aici propun să ne oprim. Belferul din mine îmi cere să precizăm mai întâi în ce constă *metoda inducției matematice* sau a *inducției complete*, și apoi să vedem de ce se deosebește ea de *inducția fizică* ?

— Ideea nu-i rea deloc și aș putea să te ajut, ca să-mi mai las nepotul să-și tragă sufletul !

— Strașnic ajutor, când materialul se găsește chiar în primul articol.

— Cu atât mai bine ! Tu poți urmări și să ne oprești dacă vom greși. Demonstrația prin inducție matematică are la bază faptul că dacă observ că numărul 1 are o anumită proprietate pe care o întrezăresc și la celelalte numere naturale, o presupun adevărată pentru un număr n și o dovedesc că este valabilă pentru numărul $(n+1)$. De aici trag concluzia că proprietatea respectivă este adevărată pentru toate numerele naturale N .

— Acum, dă-mi voie să adaug și eu că, în acest mod de a raționa, noi am sărit peste toate etapele finite: « $n=2$, $n=3$ etc. și ne-am oprit numai la numărul $(n+1)$ în care n nefiind definit, se poate considera că ar putea fi și infinit de mare. Aici apare deosebirea dintre acest raționament matematic, care nu este legat de fazele finite caracteristice experiențelor și acela al inducției fizice. Poincare vedea în el o expresie a *intuiției pure* ce se înfățișează ca o judecată sintetică, apriori și creatoare, fiindcă „numai spiritul are calitatea de a concepe repetiția nedefinită a unui aceluiași act”. Este un procedeu *logic intim*, care corespunde mecanismului ce conduce la o concluzie sau descoperire matematică.

— Și de ce intim ?

— Pentru că nimeni nu a putut dezvălui, până acum, cum se petrece el, în interiorul conștiinței noastre, până când ne apare gata conturat în minte. Deși inducția matematică și inducția fizică au un drum paralel și în același sens, fiindcă ambele

pornesc de la particular spre general, iar un enunț rezultă din cel anterior lui, Poincare consideră că raționamentul matematic *prin recurență* se deosebește esențial de acel *fizic inductiv*, fiindcă se bazează pe principii diferite. Generalizarea pe care o stabilește inducția fizică are o *notă îndoielnică*, deoarece ea se bazează pe observațiile asupra unor serii de evenimente, fenomene sau experiențe între care *s-ar părea* că există o anumită *relație constantă*. Fără a folosi nici un fel de raționament, ci numai credința că există în Univers o ordine independentă de noi și de activitatea noastră, relația constantă ce a fost observată este transformată într-o lege empirică pe care evenimentele sau fenomenele respective ar trebui să o urmeze.

— Poincare afirma, după cum am mai spus, că „raționamentul prin recurență” nu ne vine din experiență, căci experiența ne-ar putea învăța că regula este adevărată pentru primele zece, o sută de numere, adică nu pentru șirul nedefinit al numerelor, ci numai pentru o parte a lui, mai mult sau mai puțin lungă, dar totdeauna mărginită... Această regulă inaccesibilă demonstrației analitice și experienței este veritabilul tip de judecată sintetică „apriori”. (2, p. 23).

— Nu toți matematicienii au acceptat părerea lui Poincare despre raționamentul prin recurență. În cartea lui Beth: *Fundamentele logice ale matematicii* (7) găsim că : „este posibil să se dea o justificare logică raționamentului prin recurență”. Iată și părerea logicianului român A. Dumitriu, exprimată astfel în volumul ce l-am adus mai înainte. *Mecanismul logic al matematicilor* (8) : „Pentru a justifica raționamentul prin recurență în mod riguros, mijloacele logicii elementare — formalizate — nu sînt suficiente. Pentru aceasta s-a întrevăzut posibilitatea creării unor logici mai „tari”, de ordin superior logicii elementare... Cu toate acestea, putem spune de la început că o asemenea rezolvare nu va dezlega secretul raționamentului prin recurență, ci îl va strămuta în

domeniul axiomelor și presupunerilor, pe care se va baza o *logică neelementară*, chiar dacă acest secret va lua altă formă".

— Cele citite de tine. Nucule, mi-au amintit de conferințele ținute la Zurich, în 1938, asupra fundamentelor matematicii. Se găsesc într-un volum din dulapul acesta de lângă noi, la colecția „Congreselor”. Dacă vrei, caută-1, aș vrea să citim câteva rînduri de acolo, în legătură cu raționamentul matematic și natura lui.

— Mă grăbesc să o fac, căci doresc să ascult părerile unor matematicieni celebri, rostite la un sfert de veac de la moartea lui Poincare.

— Nici eu nu sînt contra, dar mai înainte aș vrea să precizăm înțelesul a două noțiuni peste care am trecut cam ușor. Odinioară au existat multe discuții asupra lor. Anume, să revenim la noțiunile de „raționament analitic” și la cel „sintetic a priori”.

— Ai dreptate, dragă Teodor. Discuțiile acestea au fost necesare îndată ce problema fundamentelor matematice a început să preocupe pe matematicieni. După cîte știu, Immanuel Kant considera că o *judecată este analitică* dacă ea se poate deduce numai din definiții și principiile logicii și este *sintetică* atunci cînd ea presupune că la baza ei există și alte date în afară de definițiile și principiile logicii.

— Dragă Bădie, mi se pare că nu-i tocmai așa ! Beth, (4, p. 14) după ce confruntă părerile exprimate de Kant în *Critica rațiunii pure* și în altă lucrare anterioară acesteia, ajunge la concluzia că : „judcățile sintetice sînt caracteristice numai matematicilor pure. Judecățile sintetice pornesc de la definiții care introduc noțiuni noi prin combinarea arbitrară a unor anumite noțiuni primitive. O asemenea deducție, bazată pe astfel de definiții apare ca un calcul simbolic, asemănător calculului algebric, și de aceea este propriu numai matematicii pure”. Așa că, atît Descartes, cît și Kant considerau că există un raționament *intuitiv* sau *constructiv* folosit în matematica pură și un altul *formal* sau *silogistic*, propriu filosofiei. în

filosofie sau în fizică se impun *judecățile analitice*, în matematică cele *sintetice*.

— Acum, acestea fiind clarificate, poți îndeplini. Nucule, dorința unchiului !

— Nu ți-a fost greu să afli volumul, ceea ce arată că buna tradiție a ordinii ce caracteriza S.M.I. pe vremea noastră, s-a păstrat neschimbată !

— Ați spus S.M.I., dragă profesore ? Ce semnificație are acest cuvânt ?

— De multă vreme nu l-am mai auzit nici eu, dragă Toa ! Și ce mîndri eram odinioară cînd îl pronunțam ! Cît ne-am bucurat cînd a apărut articolul profesorului Myller despre curba S.M.I. ! Așa-i că mata, stimată asistent al *Seminarului Matematic Iași*, habar n-ai de curba S.M.I. ?

— Mărturisesc sincer că nu, dar din felul cum m-ai apostrofat am înțeles că S.M.I. sînt inițialele numelui pe care l-a purtat biblioteca mai înainte de a i se fi adăugat și pe acela al întemeietorului ei.

— O descoperire cu care te poți mîndri ! Dar ca faima să fie deplină, ar fi bine să cunoști și curba S.M.I., descoperită de academicianul Alexandru Myller, care a format și cuvîntul. Caută articolul în dulapul „Separatelor”, după ce stabilești la fișier, în ce volum se găsește. Oricum, la „Separata B”, căci în „A” sînt extrase format mare !

— Am să-l caut numaidecît, Bădie. Ascultîndu-te, mă întreb dacă-mi vor intra și' mie *în sînge*, așa cum simt că s-au petrecut lucrurile cu mata, fiecare colțișor, fiecare carte și raft al acestei biblioteci ?

— Ia mai lasă sentimentalismele și complimentele la o parte, că altfel ne apucă noaptea aici ! Iată, am găsit, la p. 54 ce spunea M. Frechet (9) : „Fără a avea pretenția



Alexandru Myller

la o inovație, vrem să încercăm să combatem o părere încă foarte răspîndită și să arătăm din nou că matematica nu este o teorie pur logică. Această afirmație se referă atît la metoda de cercetare, cît și la conținutul însuși al matematicii. În ceea ce privește primul punct, deși matematicianul este privit ca un savant care procedează numai prin deducții, nu-i greu să admitem că intuiția îi arată ce direcție trebuie să apuce... orientarea matematicii și sensul în care se efectuează progresul ei nu sînt condiționate numai de necesitățile interne (organizare, sistematizare, simplificarea rezultatelor acestor transformări logice). Ea este motivată încă, și mai ales, de cerințele venite din afară, de problemele concrete puse de natură și tehnică". Nu citesc mai departe căci ne-am lungi prea mult, trec la părerile altui matematician renumit, H. Lebesgue, și încep de la p. 110 : „A arăta cum se construiesc matematicile înseamnă să-i studiem fundamentele, dar dintr-un punct de vedere care ne-ar face să ne îndepărtăm mult de domeniul logicii... Matematicianul nu se ocupă decît de studiul deductiv; și nu privește de altfel decît raționamentul gata făcut, căci construcția unui raționament logic nu se face în mod logic. Astfel, închis în turnul său de fildeș, matematicianul

se crede un triumfător, cînd în realitate nu-i decît o rotiță într-o uzină logistică... Matematica nu-i decît un instrument pe care alții, filosofi, fizicienii, inginerii îl vor folosi în mod util". După cum vedeți, nici peste un sfert de veac, problema despre natura raționamentului matematic nu s-a lămurit, logica și intuiția continuă să se înfrunte.

— Dar nici peste alte trei decenii nu găsim alt fel de răspuns, deși numărul cercetărilor și al lucrurilor din acest domeniu a crescut destul de mult. Ca să vă dovedesc asta, aș vrea să citesc și eu numai cîteva rînduri din cartea lui Anton Dumitriu (8), din capitolul intitulat chiar „Natura raționamentului matematic”, care începe de la p. 278. La p. 309 discută *caracterele raționamentului*, iar primul menționat este *caracterul tautologic*, despre care se spune : „Am văzut că funcția formală a raționamentului matematic este esențial tautologică și că el are altă putere decît de a stabili echivalențe între definiții... raționamentul matematic nu poate fi altfel decît tautologic...” Iar mai departe, la p. 313, din nou: „Ideea că raționamentul este tautologic este o idee mai veche, dar ea a fost profesată cu multă vigoare de L. Wittgenstein și de adepții Școlii din Viena... Din nefericire, toți acești gînditori conchid că, dacă raționamentul este tautologic, întreaga matematică este tautologică, cu alte cuvinte ea nu spune decît $A=A$ ”.

— Stai, oprește-te ! Cum adică, vrei să ne întoarcem, după atîția ani, ca să afirmăm ceea ce nega Poincare ?

— Nu ca să afirmăm, căci părerea pe care am citit-o este, după cum ați constatat, numai a unor anumiți matematicieni, numiți logisticieni și a logicienilor. Ea nu-i generală ; formalistii și intuiționistii, de pildă, o combat. Păcat că nu putem cuprinde deodată totul... că trebuie să ne oprim aici. Problema aceasta este așa de tulburătoare...

— Și cine ne oprește să cuprindem totul, dar cu încetul, puțin cîte puțin ? Desigur că nu acum, cînd am rămas singuri aici și trebuie să ne mai ducem

pe la casele noastre, dar altă dată !

— O ! Dacă ați vrea, aș fi foarte fericit să continuăm această discuție al cărui obiect nici nu s-a conturat încă așa cum trebuie !

— Eu nu am nimic contra, însă cred că cel mai bine ar fi să stăm de vorbă la mine acasă, ca să nu ne temem că am putea 'stingheri pe acei ce ar avea de lucru în această sală. Într-o după amiază, de pildă, când nepotul meu ar fi liber, dacă îți convine și ție dragă Toader...

— Eu sînt oricînd dispus să vin, să hotărască Nucu ziua.

— Eu sînt liber în fiecare miercuri după amiază.

— Perfect, atunci să rămîna pe miercurea viitoare, numai că pun o condiție !

— Care ?

— Să fixăm dinainte subiectul ce-l vom ataca, nu de alta, dar nu-mi place poza vițelului la poarta nouă !

— Adică, să mă pregătesc cumsecade, că altfel... măcar că nu mai este amenințarea catalogului... Asta-mi place foarte mult, căci voi veni cu aceleași emoții ca atunci cînd avem de pregătit cîte un subiect pentru ședințele cercului nostru de elevi !

— Mă rog, acum e rîndul tău să fixezi subiectul și noi să ne supunem lui.

— Dacă-i vorba să o luăm cu încetișorul, atunci propun să lămurim între noi, și fără nici o pretenție, *problema fundamentelor matematicii*. Să începem cu apariția noțiunilor matematice, cum s-au impus ele și cînd a apărut necesitatea de a *le defini*. Problema aceasta a *definițiilor* este extrem de pasionantă. Ce părere aveți, dumneavoastră ?

— Că-i bine și să ne vedem sănătoși, miercuri după amiază !

II

ADINCURILE SE CER SCORMONITE

— Știind că ne vom întâlni astăzi, a început Nucu, de aseară gîndurile au început să scormonească prin trecutul acela îndepărtat în care te tot afunzi fără să-i dai de capăt, îl căutam acolo pe omul care a înțeles întîia oară și dintr-o dată că are o putere ascunsă în el, care-l îndeamnă să cerceteze mai adînc lucrurile ce-l înconjoară. Și pînă atunci le văzuse, le simțise, le mirosise, le auzise sau le pipăise, dar abia în clipa aceea și-a dat seama că el *privește lucrurile* și *știa* că le privește. S-a uitat la Soare nu ca altădată, fiindcă de-abia atunci a înțeles că din cauza lui este ziuă și că după ce Soarele coboară și se ascunde vine noaptea. A simțit dintr-o dată o mare și necunoscută bucurie, alta decît aceea cînd mîncă pe săturate sau își astîmpăra setea. El a fost poate și acela care a făcut pentru întîia oară deosebirea dintre un *singur obiect*: o piatră. Soarele, Luna și o *mulțime de obiecte*, stelele de pe cer, semenii lui, copacii, picăturile de ploaie ; dintre o *formă* și altele. Din forma fulgerului a cunoscut *linia* dreaptă, — sau poate din tulpina copacilor și a florilor ? — conturul Soarelui i-a arătat cum era un cerc, iar după aceea a obserat și alte curbe pe lîngă care trecuse odinioară fără să le bage de seamă. Cine știe cîtă vreme au trăit oamenii în această euforie provocată de trezirea conștiinței și de dorul de a cunoaște ? Dacă acum vreo 40 000 de ani strămoșii noștri din

Cro-Magnon depășiseră etapa grijii de a căuta hrana și aveau preocupări artistice înseamnă că omul pe care-l căutam eu astă noapte trebuie să se fi născut cu mult mai devreme, poate acum, vreo 80 000 sau chiar 100 000 de ani.

— Cine poate ști ? Noi cunoaștem doar faptele petrecute cu cinci, șase mii de ani în urmă, când egiptenii, babi-lonenii, chinezii sau hindușii aveau școli.

— Știu, dar aceste date nu mă mulțumesc, fiindcă la acea epocă oamenii depășiseră de mult faza de inițiere în problemele matematicii, cunoștințele lor fiind bine precizate. Pe lângă noțiunea de număr abstract ei aveau un sistem de numerație zecimal, ba și altul sexagesimal, cunoșteau geometrie, astronomie și chiar trigonometrie, căci puteau calcula panta unui plan înclinat, adică ceea ce numim azi cotangenta unui unghi α puteau rezolva ecuații algebrice de gradul I și II și multe altele. Eu însă aș fi vrut să-l întâlnesc pe omul acela în care au licărit, la începutul începutului, primele noțiuni matematice și să-l întreb cum a reușit să definească numărul, mulțimea, șirul, punctul, dreapta, lungimea, aria, volumul ș.a.m.d. Pe el l-am căutat astă-noapte pînă am adormit.

— Bine că ai adormit, că altfel nu s-ar mai fi ales nimic din întâlnirea noastră. De altfel, e cam greu de închipuit că oamenii de atunci și-au bătut capul cu asemenea probleme. Judecînd după propria mea experiență din copilărie, cred că aceste întrebări s-au format pe încetul și tîrziu de tot. Cînd am învățat să număr, nu-mi amintesc. Părinții mei erau țărani, neștiutori de carte, dar n-aș putea spune că nu-i preocupau chestiunile matematice. Probabil că de la ei mi-a venit îndemnul să număr și să compar. Cea mai mare plăcere a mea era să măsoar cu pasul cît de largă și de lungă era ograda, sau cu palma cît de mare era distanța de la un capăt al mesei la celălalt și tot așa înainte. Măsurăm o lungime fără să știu ce este

aceasta, fără să mai fi întrebat vreodată ce înseamnă *o lungime* și cred că dacă cineva mi-ar fi pus această întrebare mi s-ar fi părut fără sens. Nici mai târziu, când m-am dus la școală nu am știut ce este o lungime, o suprafață, un volum altfel decât prin calculele ce le executam în mod practic. Dealtfel, nici în cele mai vechi scrieri nu s-au păstrat *definiții*, ci numai reguli practice de calcul al ariilor, volumelor, capacităților etc. Student fiind, am aflat pentru întâia oară că întrebările puse de tine i-au preocupat pe geometrii greci, după ce ei au învățat *Aritmetica* și *Geometria practică* de la egipteni. De atunci aceste probleme m-au interesat foarte mult și i-am admirat pe grecii care nu s-au mulțumit numai cu cunoașterea regulilor practice de calcul, ci au căutat să le pătrundă adâncul și să zăbovească asupra naturii noțiunilor folosite în calcule, întrebându-se de ce se procedează așa ?

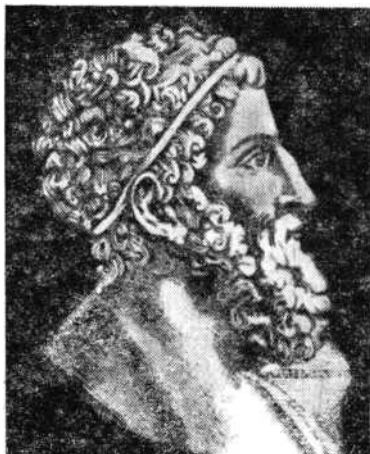


— Da, îmi aduc aminte cum ne vorbeați la cercul nostru de matematici despre acei geometri greci care au trăit între secolele al V-lea și al III-lea î.e.n. Acum înțeleg eu de ce puneți atîta căldură și pasiune cînd pomeneți de Tales, Euclid, Arhimede și alți geometri greci, sau de Aristotel, care a pus la

temelia gîndirii matematice definițiile. Ne-ați explicat atunci că *definițiile* nu stabilesc *existența* lucrurilor, ci le *delimitează* ! Ne-ați mai spus că acesta este de altfel și înțelesul cuvîntului grecesc „orismos”, care a fost tradus în latinește prin „definitio”. În fine, că pentru a defini o noțiune matematică trebuie analizate elementele simple din care este formată această noțiune.

— Îmi pare bine că nu ai uitat acele începuturi : atunci vorbeam eu, acum ți-a venit ție rîndul ! Ce-ai zice dacă ne-am opri să analizăm natura definițiilor din *Elementele* lui Euclid ? Multe dintre ele sînt *descrieri* în care se mai văd urme din experiența acelor care au construit templele, piramidele, sau care au împărțit loturile de pămînt. Iată și exemple : *suprafața* unui corp este limita care-l separă de spațiul înconjurător, *volumul* este locul pe care-l ocupă un corp în spațiu”

— Da, dar mai sînt, stimate profesore, și definiții ca acestea: „Se numesc figuri, volumul, suprafața și linia.



Arhime

iar aceste figuri nu depind de corpurile cărora le aparțin”. Aici apare foarte clar tendința de a scoate intuiția din definiția noțiunilor geometrice, astfel că acestea să poată fi privite ca figuri abstracte din spațiu.

— Trebuie însă să precizezi la care spațiu te referi ? La *spațiul fizic* în care se află corpurile reale, sau la acela *al formelor geometrice* ? în ultimul caz, acesta nu s-ar putea cunoaște decât după ce au fost recunoscute figurile geometrice.

— Mă bucur, Bădie, că ai pus mata această întrebare fiindcă ea ne obligă să aprofundăm *problema definițiilor în matematică*.

— S-o aprofundăm zici ? Și cum am putea-o face mai înainte de a lămuri însăși problema definiției matematicii ?

— Dar cred că toți trei știm că cea mai veche definiție a matematicii a fost dată de Aristotel. El a numit-o *știința cantității* și această definiție a dăinuit pînă în secolul al XIX-lea cînd Auguste Comte a mai modificat-o puțin și anume afirmînd că *matematica este știința măsurătorilor indirecte*; astfel ea se arăta mai adecvată problemelor noi pe care le trata atunci *Astronomia* și *Fizica teoretică*. în prima fiind vorba numai de distanța și mărimea stelelor sau a planetelor din sistemul solar, în cealaltă și de dimensiunile și pozițiile atomilor. Curînd însă și această definiție s-a dovedit nepotrivită, căci apăruseră multe domenii noi care nu mai aveau nici în clin, nici în mînecă cu cantitatea și cu măsurătorile ei, ci numai cu structuri, asta înseamnă cu anumite legi de compunere aplicate unor mulțimi de obiecte și cu relațiile dintre acestea: Teoria grupurilor. Teoria mulțimilor. Algebra logicii. Geometria proiectivă. Topologia ș.a.

— în acest caz s-ar potrivi definiția dată în 1904 de matematicianul american Maxime Bocher: „Dacă avem o anumită clasă de obiecte și o anumită clasă de relații și dacă singurele probleme pe care le cercetăm sînt : dacă grupuri ordonate din aceste obiecte satisfac sau nu relațiile, rezultatul acestor cercetări se numește matematică”.

— însă pînă acum nici aceasta și nici una dintre încercările ce s-au mai făcut ca să se găsească o definiție potrivită pentru matematică nu a primit

aprobarea unanimă a matematicienilor.

— Ba eu cunosc una care e acceptată de toți, deși e numită „butada lui Russell”. O știți și dumneavoastră: „Matematica este singura știință în care nu se știe niciodată despre ce se vorbește și nici dacă ceea ce se spune este adevărat”.

— Îmi place și mie foarte mult. De aceea am și copiat aceste rînduri care se referă la ea. Le am scrise în acest caiet și vreau să vi le citesc. Sînt din conferința lui Lebesgue : „Butadă demnă de umorul englezesc, ascunzînd un adevăr adînc sub un rîs zgomotos. Un rîs care pare adevărat, dar care este totuși învăluit într-o melancolie resemnată. Asta pentru că trebuie multă resemnare ca să accepți să plătești siguranța absolută, rupînd toate legăturile care unesc siguranța și adevărul, adică renunțînd să dai matematicii o valoare umană”. (9, p. 112)

— Parcă ai găsit anume acest citat, Bădie, ca să-l am ca introducere la cele ce aș vrea să spun în legătură cu definiția geometriei. După cum se știe, există în geometriei două tendințe opuse, una care continuă să vadă în conceptele abstracte ale geometriei originea lor intuitivă și alta, care a rupt cu această tradiție și consideră noțiunile matematice ca pe niște creații libere ale spiritului nostru, fără legătură cu realitatea înconjurătoare. Unde-i adevărul ? Fiecare ideologie rămîne la părerea ei; ca să le înțelegem ar trebui să urmărim definițiile de la care pornesc. Căci în structura acestor definiții se află punctul nevralgic de la care au început multe scandaluri, care în loc să se aplaneze continuă să se întetească.

— Măi băiete, dacă spui un lucru, du-1 pînă la capăt. Doar de atîtea ori ne-am ciondănit noi pe chestia asta ; și mai ales acum, dacă te-ai lăudat că vom face filosofie, e nimerit să precizezi că te referi la cele două curențe antagoniste, cunoscute în filosofie sub numele de *realism* și *nominalism*. *Realistii*, ca odinioară Platon, consideră că ideile abstracte au o realitate spirituală, că ele există în natură și că omul n-are altceva de făcut decît să le descopere. În Evul Mediu faptul era exprimat în

latinește prin propoziția: „universalia sunt realia” adică „noțiunile generale abstracte au realitate” ; de aici vine numirea de *realiști*, cu toate că numai realiști nu-s 1 *Nominaliștii*, care se numesc azi *pragmatiști*, susțin că nu există decît lucrurile individuale, concrete, și că din acestea s-au format noțiunile generale, abstracțiile, care sînt idei, adică numiri ale lucrurilor, așadar, cuvinte. în latină se spunea : „universalia sunt nomine”, de aici numirea de *nominaliști*.

— Habar nu am avut de asta, stimată profesore, și vă mulțumesc pentru intervenție. Acum îmi explic și eu rostul expresiei „realism platonician” pe care am întîlnit-o și o consideram fără sens. Acest punct fiind lămurit, cred că putem face primii pași în domeniul definițiilor matematice.

— Prea bine, s-o luăm atunci sistematic și pe îndelete. Știm de la Aristotel ce înseamnă a *defini o noțiune*. Ca și Socrate sau Platon, el considera că în definiția unei noțiuni se află însăși *esența* noțiunii definite, exprimată direct prin *genul proxim* și *diferența specifică*.

— Așa-i numai în mod teoretic, căci practic sînt unele lucruri care au mai multe calități și e foarte greu să te hotărăști pe care să o alegi și pe care să le lași deoparte cînd vrei să stabilești care să fie *diferența specifică* ! Dar mai este ceva : nu orice noțiune are un gen și nu pentru orice noțiune se poate stabili *diferența specifică*. De exemplu, *categoriile* sau noțiunea de *existență* sînt așa de largi, că nu mai admit un gen proxim. Vă întreb, cum putem defini noțiunea *drept* ? Este o noțiune indefinisabilă.

— Ai dreptate. Dar pentru aceste noțiuni definiția se înlocuiește prin descriere, caracterizare, comparație, deosebire, și alte operații logice. Tocmai de aceea am insistat eu să o luăm sistematic. De pildă, geometrii greci au introdus, încă din secolul al V-lea, *definiția prin construcție*. Produs arăta că atît Hipocrat din Chios, cît și Oinopides cu elevii lui au stabilit existența obiectelor matematice, folosind

construcțiile cu rigla și compasul. Și dacă nu puteau aplica această metodă, recurgeau la altfel de construcții, numite *mecanice*, în care elementele pe care se bazau erau curbe construite prin puncte cum sînt conicele, spiralele ș.a., ba mai întrebuițau încă un alt procedeu, numit *de alunecare*.

— Cred că acum am putea trece de la exemplele de definiții geometrice la problema generală a definiției. Am să folosesc cartea lui A. Dumitriu *Mecanismul logic al matematicii* din care ai citit tu la Seminar data trecută și pe care o am și eu.

— Dar pe copertă văd că scrie „al matematicilor”, de ce nu citezi, mata Bădie, titlul corect ?

— Pentru că eu sînt de părere că există o singură matematică deși în această privință au fost și mai sînt încă multe discuții. La pagina 239 (8), autorul menționează nu mai puțin de 10 tipuri de definiții recunoscute de logicieni. Am să vi le citesc, cu titlu de curiozitate, fără să insist și asupra comentariilor făcute : 1. *Definiții nominale* — acestea oferă semnificația unui cuvînt care desemnează un concept. 2. *Definiții reale* — exprimă caracterele esențiale ale unui lucru, indiferent de concepția metafizică care s-ar lega de aceste caractere esențiale (Aristotel), sau dacă acestea ar fi numai semnele determinante ale unui concept (Kant și Fries). 3. *Definiții analitice* — sînt definițiile unui concept dat, pe care îl exprimă printr-o judecată analitică. 4. *Definiții sintetice* — sînt, după Kant, obiecte construite care stabilesc o nouă noțiune și introduc pentru această noțiune un termen. 5. *Definiții explicite* — acestea reduc o noțiune la o combinație logică a altor noțiuni cunoscute. 6. *Definiții implicite* — cînd noțiunea ce trebuie definită nu este izolată într-un mediu, ci este implicată într-o combinație de idei. 7. *Definițiile prin uz* — introduc un concept prin indicarea întrebuițării lui. 8. *Definiția prin abstracție* a fost stabilită de Frege și Russell astfel : Oricare ar fi x și y , aparținînd unei clase oarecare

a, egalitatea $\langle p(x) = \langle p(jy) \rangle$ echivalează cu o relație oarecare R între x și y . 9. *Definiția prin corespondență* — este legată de corespondența ce se poate stabili între elementele care aparțin la două clase diferite a și b . 10. *Definiția prin recurență*.

— Definiția prin recurență ne este cunoscută, căci am discutat data trecută problema raționamentului prin recurență.

— Da, ea se exprimă prin egalitatea $x + n = [x - f(n-1)] + 1$, care definește numărul $\% + M$ când a fost definită operația $x + (M-1)$. Putem adăuga, pe baza celor stabilite atunci, când ea nu este o definiție pur logică, deoarece conține o *inifnitate de definiții distincte*, fiecare dintre ele avînd sens numai atunci când este cunoscută aceea pe care o Drece.

— Drept să-ți spun că 10 moduri de a stabili o definiție mi se pare cam mult.

— Ei bine, ca să nu ți se mai pară mult, află, dragă Teodor, că acestea sînt cele ce le-am putut enumera acum, fără să avem o pregătire prealabilă și că mai există altele despre care vom putea vorbi poate mai tîrziu, când vor putea fi înțelese. Totuși, ca să te împac, află că profesorul Dumitriu scrie în continuare că nu toți matematicienii au fost de acord cu această clasificare și dă ca exemplu pe Walter Dubislav care „reduce tipurile de definiție la cinci” : 1. Definițiile sînt reguli de substituții ale unor semne prin altele. 2. Pot fi prescripții semnificative ale lucrurilor. 3. Definițiile pot fi construcții de concepții. 4. Explicații de semne. 5. Explicații de lucruri”. Iar în lucrarea pe care Dubislav a publicat-o în 1931 cu titlul *Die Definition*, el observa că „despre ce este o definiție domnește o dispută nu numai între logicieni, dar și între matematicieni, fizicieni și juriști, pentru a nu mai vorbi și de alții care nu sînt de acord asupra acestui lucru”. Foarte interesantă este încă concluzia prof. Dumitriu de la p. 242 : „Nici Dubislav, cu tot efortul considerabil pe care l-a făcut într-o lucrare întreagă, nu izbutește să

degajeze modul — sau modurile — de a defini, de cazurile în care se definește. El face o listă a ceea ce efectiv poate exprima o definiție și nu cum se construiește o definiție".

— Este tocmai ceea ce am spus și eu mai înainte, fiindcă cinci sau zece sau cincisprezece moduri de a defini îmi arată cum nu se poate mai bine că logicienii nu au găsit calea pe care trebuia să o apuce, *ca să definească definiția !*

— Cred că ar fi interesant să vedem cum a pus problema Poincare. Citind în *Dernieres Penrees* zilele trecute capitolul intitulat „Logica infinitului” am găsit: „orice definiție este o clasificare. Ea separă obiectele care satisfac definiția de acelea care nu o satisfac și le așază în două clase deosebite. Dacă ea procedează prin genul proxim, atunci și diferența specifică se sprijină pe subdiviziunea genului în specii. Dar, o definiție, ca orice clasificare, poate fi predicativă sau nu” (10).

— Stai, Bădie, că pomenind despre *definițiile predicative sau nu*, dăm de bucluc ! Poincare a introdus noțiunea de *clasificare predicativă*, avînd el anumite răfuieli cu partizanii teoriei mulțimilor.

— Te rog să mă lămurești și pe mine despre ce-i vorba, fiindcă unchiului tău vād că problema îi este cunoscută.

— Am să mă mărginesc acum numai la cîteva indicații generale, căci această problemă va fi discutată pe îndelete de îndată ce vom ataca teoria mulțimilor și mai ales ne vom ocupa de logicism. Poincare considera că dîndu-se o mulțime de obiecte diferite, așezate după un anumit criteriu, clasificarea este *predicativă* dacă prin introducerea altor elemente noi nu se produce o perturbare în ordinea în care fuseseră așezate elementele mai înainte, ci numai o deplasare, anume acea deplasare necesară ca să se poată intercala elementele apărute ulterior. Clasificarea însă este *nepredicativă* dacă norma după care au fost așezate obiectele era de așa natură încît, pentru a intercala noile elemente nu-i de ajuns o simplă deplasare, ci trebuie făcută o schimbare radicală în

ordinea în care fuseseră așezate elementele de mai înainte.

— Asta înseamnă că aceste două noțiuni *sînt contradictorii*, fiindcă numai un adjectiv *care exprimă o noțiune pe care o posedă* este *predicabil*. Unde a vrut să ajungă Poincare cu această observație asupra definițiilor ?

— Ei, tocmai aici e toată frumusețea ! Mai întîi a stabilit cărei categorii îi aparține cuvîntul *nepredicabil*. Dacă el ar fi nepredicabil, atunci el ar posedea calitatea pe care o exprimă, așadar ar aparține categoriei cuvintelor *predicabile* și în acest caz, fiind *predicabil*, ar trebui să fie cum o arată cuvîntul *nepredicabil*. Aceasta este însă în contradicție cu definiția, care arată că tot ce nu este predicabil este nepredicabil !

— Va să zică, povestea cretanului mincinos apare și în cadrul definițiilor ?

— Da, și prin acest paradox Poincare a căutat să atragă atenția celor ce se ocupau cu filosofia matematicii că una dintre cauzele de neînțelegere dintre ei provenea „din felul cum sînt concepute definițiile”. Pornind de la această observație, el le-a atras atenția *că definițiile nu împart mulțimea cuvintelor în două categorii distincte*, că nu există numai *două răspunsuri* certe : *da* și *nu*, ci și eventualitatea a cel puțin unei a treia categorii de cuvinte : *nici da, nici nu*, pentru care acele definiții nu însemnau nimic. El a dat următoarele exemple de *definiții false*: „cuvîntul nepredicabil este nepredicabil” și „cuvîntul nepredicabil este predicabil”, și a arătat că definiția „cuvîntul nepredicabil nu este nici predicabil și nici nepredicabil”, este adevărată.

— Tot despre definiție am să vă citesc și eu ceva din cartea lui Leon Brunschvicg (11): „Astăzi nu mai avem ambiția să definim orice. Dar aceasta nu cum o credea Pascal, pentru că „împingînd cercetările mereu mai înainte se ajunge în mod necesar la cuvinte primitive pe care nu le mai putem defini”, ci pentru că nu am ajuns să ne facem o idee clară despre *definiție*. Noțiunea de

definiție, scria M. Russell nu-i definisabilă și nici nu-i deloc o noțiune definită ".

— în adevăr, dragă Toadere, și această butadă a lui Russell rezumă perfect cele discutate de noi acum !

— Dacă v-a plăcut am să vă mai citesc ceva. Iată cum începe *Prefața* pe care a făcut-o Jacques Hadamard la cartea scrisă de F. Gonseth *Fundamentele matematicii* (12), o carte ce îmi este nespus de dragă, și pe care cred că Nucu a răsfoit-o.

— Nu, n-o cunosc.



Jacques

— Ei, atunci data viitoare am să o aduc cu mine, dar acum ascultați: „Fiecare dintre concepțiile noastre principale, fiecare ramură a cunoștințelor noastre trece în mod succesiv prin trei stări teoretice diferite : — starea teologică sau fictivă, starea metafizică sau abstractă și starea științifică sau pozitivă. Astfel, a spus într-o zi Auguste Comte și formula, rezistînd victorioasă încercării faptelor, a rezumat pînă aici, în mod fidel, istoria intelectuală a omenirii. Sîntem oare din întîmplare la o cotitură a acestei istorii ? Căci iată un fenomen straniu, fără precedent în istoria gîndirii. O știință ajunsă în starea pozitivă este în curs de a-și

schimba drumul ca să revină la starea metafizică. Iar această știință este cea mai simplă, cea mai veche, cea mai perfectă dintre toate, anume matematica".

Cînd prietenul meu a terminat de citit am tăcut toți trei. Simțeam parcă apăsarea stăruitoare a gândirii, aidaoma unui sfredel masiv care pătrunde într-o rocă să-i descopere metalul prețios. De aceea, m-am ridicat să fac o cafea, dar m-am îndreptat spre ușă căci am auzit soneria. Venise profesorul Mihai Ursu, celebru neurochirurg, cu care legasem prietenie după operația care mi-a făcut-o în șira spinării, ca să-mi redea posibilitatea de a umbla.

— Ați venit tocmai la timp, dragă doctore. Mă duceam să fac o cafea ca să-mi liniștesc prietenii după sfada la care am asistat pînă acum. Luați loc, vă rog.

— Sfadă ? între cine ? Văd că sînteți numai dumneavoastră aici și nimic nu-mi arată că s-ar fi petrecut ceva neplăcut.

— Cu noi nu, dar de petrecut s-a petrecut ceva și anume cu bazele matematicii.

— Nostimă glumă, profesore Toader. Și o gust, fiindcă nu cunosc o știință mai solidă, mai sigură și mai precisă decît matematica. Ea duce în spate toate științele, pînă și medicina. De aceea, deși o cunosc destul de puțin o admir foarte mult !

— Aveți dreptate, cine nu știe că cu dragostea nu-1 de glumit ? Mi-a spus prietenul meu cu cîtă căldură i-ați vorbit odată, cînd era internat la spitalul dumneavoastră, despre cursul de tomografie pe care l-ați urmat la Paris. Ba, el este convins și e foarte fudul că reușita operației lui se datorește în parte și geometriei în spațiu !

— Și credeți că nu are dreptate ? Tomografia este una dintre cele mai noi aplicații ale geometriei în spațiu la medicină. Posibilitatea de a face radiografii executate pe secțiuni oricît de apropiate, în adîncul trupului omenesc și la adîncimea care interesează, înseamnă un ajutor neprețuit pentru cel ce operează. Iată de ce aș

accepta orice motiv de sfadă între matematicieni, dar nu pe acela care mi l-ați invocat.

— Dar nu-i deloc o glumă, stimată doctore. Dumneavoastră vă lăudați că știți ce este matematica și eu vă felicit sincer, fiindcă sînteți unicul om care o poate afirma! Am să vă dovedesc aceasta citindu-vă cîteva rînduri dintr-o carte bine cunoscută pe care am adus-o cu mine. Se cheamă *Introducere în filosofia matematică*, a apărut în 1960 și a fost scrisă de Șt. Korner, un renumit profesor de filosofie și matematică de la Universitatea din Bristol. (13) „La întrebarea: ce este matematica ? *Logicistul* pur spune l este logică. *Formalistul* spune : mînuire de cifre în calcule, *Intuiționistul* spune: construcții ale intuiției temporale, iar *Pragmatistul logic* spune : propoziții pe care le abandonăm mai ușor decît pe cele de logică și mult mai greu decît pe cele empirice. Să mai adăugăm că există și poziții intermediare. Progresul logicii matematice, de la Boole și Frege încoace, nu a împiedicat continuarea disputelor filosofice în jurul naturii matematicii". Acum mă credeți că nu am glumit ? Să nu vă închipuiți că vreau să bîrfesc matematica, pe care o adorăm și noi, dar aflați că pentru nimeni nu mai este un secret că nici un matematician nu va putea spune ce este *un număr întreg* — vă rog să rețineți : un număr întreg precum 0, 2, 3, 100, și nici un matematician nu vă poate garanta că în aritmetică — după dumneavoastră știința cea mai neîndoielnică — nu se va găsi cineva, vreodată, care să descopere o teoremă despre care să nu se poată afirma dacă e adevărată sau nu !

— Și poate că n-ar fi lipsit de interes să mai adaug un exemplu pe lîngă acelea amintite de profesorul Toader, anume că în matematică există cazuri cînd $1 + 1$ nu fac 2.

— Asemenea cazuri le cunosc bine, tinere. La noi în medicină avem mereu de-a face cu faptul că $1 -|- 1 = 3$ sau $1 \ 4 - 1 = 4,5$, iar uneori chiar 6.

— Așa-i, dar în cazul la care am făcut eu aluzie :

niciodată aceste două noțiuni. Acum mi-a venit și mie apa la moară, pe negîndite. Iar pînă cînd fac cafeaua am să-mi rog nepotul să repete în cîteva cuvinte cauzele ce au stîmit zîzanie și neînțelegere între matematicieni.

— Cu multă bucurie ! Dar atunci am să trec peste discordiile iscate între matematicienii care se ocupă cu filosofia matematicii, de problema naturii raționamentului matematic, căci această problemă a format obiectul unei discuții mai vechi. Azi am constatat gravele neînțelegeri care au fost provocate de diferitele concepții legate de definiția unui obiect matematic. Am constatat că aceste concepții nu diferă numai din cauza diferitelor curente stabilite în cadrul fundamentelor matematice, curente pe care le-a menționat mai înainte profesorul Toader, ci, chiar de la un matematician, filosof sau logician, la altul. Am găsit astfel enumerate, o dată, zece moduri diferite de a înțelege definiția, altă dată numai cinci și am încheiat cu părerea lui B. Russell că: „Noțiunea de definiție nu-i definisabilă și nici nu-i deloc o noțiune definită”. E de la sine înțeles cîtă importanță are această problemă, atunci cînd se discută fundamentele matematicii deoarece, *dacă nu se păstrează aceeași concepție despre definiție*, informația care se dă despre un obiect diferă de la un gînditor la altul !

— Am citit cîndva și undeva, a adăugat profesorul Toader, „că acum îi este sortit și matematicii, ca oricărei alte celule, să fie pusă la microscop, ca lumea să vadă toate slăbiciunile care pot exista la temelia ei. ” Prin aceasta am vrut să vă arăt, stimate doctore, că discuțiile noastre au în ele ceva din atmosfera care domnește și în domeniul dumneavoastră.

După ce am băut cafeaua, prietenul meu Teodor a luat caietul lui cu note spunînd:

— Aș dori să șterg totuși impresiile apăsătoare pe care vi le-am strecurat cu bîrfa noastră. În acest caiet am adunat multe gînduri scumpe mie și dintre acestea am să vă citesc cîteva rînduri ale

matematicianului francez H. Lebesgue, 'dintr-o conferință la care ne-am mai referit noi azi. (9, p. 120) E vorba despre încrederea în raționamentul matematic și deci în matematică. Iată ce spune el: „Această încredere este legitimă ? De unde vine certitudinea matematică ? Nu-i decît o slabă certitudine relativă, dar este cea mai absolută dintre certitudinile relative pe care omul le-a putut atinge. Ea vine de acolo că în matematică noi simțim mai bine ca oriunde limitele valabilității procedeele noastre de cercetare și a concluziilor noastre. Punînd într-o cușcă un leu și un iepure, nimeni nu va putea spune că $1 + 1 = 2$. Așa că, aritmetica se aplică numai cînd se aplică, dar atunci se aplică întotdeauna în cazul în care noi o aplicăm, căci în celelalte nici nu ne vine tentația de a o aplica. La fel se petrece și cu capitolele din matematica superioară J îndată ce s-au constituit definitiv nu ne mai înșelăm asupra limitelor aplicațiilor lor sau, cel puțin, dacă ne înșelăm, constatăm repede greșeala și sîntem cu toții de acord asupra ei, deși atunci cînd s-au constituit acele capitole am fost mpărțiți și am ajuns la contradicții”.

— Consider, dragă doctore, că remarca lui Lebesgue, din cartea despre care am mai vorbit azi, v-a putut da o idee mai reală despre matematică decît aceea pe care v-ați făcut-o ascultînd citatul lui Russell.

— Nu numai mai reală, dar și în conformitate cu părere- e mele.

— Atunci, dacă sînteți de acord, eu m-aș mai opri și asupra unei observații a lui Gonseth, care deși și-ar fi avut locul în cadrul discuției noastre de azi, nu mi-a venit rîndul să o citesc.

— Dar cu siguranță că dorim să-l ascultăm pe Gonseth. Iată observația lui privind știința matematică : „în esența ei, matematica nu-i decît un ansamblu de vederi și de procedee schematice ale spiritului nostru, replică conștientă a activității inconștiente care creează în noi o imagine a lumii și un ansamblu de norme după care noi acționăm și

reacționăm. Nu-i un edificiu ancorat undeva într-o absolută soliditate, ci o construcție aeriană care rezistă ca prin minune : cea mai îndrăzneată și neverosimilă aventură a spiritului", (p. 240)

— Observații în care vibrează frământarea de care este cuprins sufletul unui matematician, care caută să pătrundă în adâncul științei lui ! Vă mulțumesc pentru această discuție la care m-ați făcut să iau parte.

— Ce să ne mulțumiți ! Dacă v-a plăcut și v-ar interesa, vă invităm ca miercurea viitoare să luați parte la taifasul nostru. Care-i subiectul pe care-l vom ataca atunci, dragă Nucule ?

— Dacă discuția de azi s-a axat pe problema definițiilor, cred că ar trebui să atacăm o noțiune care nu se poate defini și nici nu ne putem apropia de ea decât cu multă sfială : *infinitul actual*.

— Infinitul actual ? Există deci și un infinit care a ieșit din uz, care nu mai este la modă ?

— Asta veți afla dacă veniți miercuri !

— Cu alte cuvinte, îmi întindeți o nadă ?

— Desigur !

— Și voi asista, cumva, la noi neînțelegeri, înfruntări, ba poate că și la vreo bătaie ?

— Altfel n-ar avea haz !

— Bine, dacă nu intervine vreun caz urgent, doresc să vin !

III

SPRE ULUITORUL INFINIT

— Infinitul dumneavoastră actual m-a ispitit toată săptămîna, așa că am venit să aflu cum îl priviți și ce părere aveți despre el, a spus doctorul Mihai Ursu cînd ne-am așezat în jurul mesei, ca să discutăm.

— Atunci, drept introducere, am să vă pun o întrebare : — Cine a zis : „Infinitul ! Nici o altă problemă, nu a zguduit atît de tare spiritul omului" ! ?

— Cine altul dacă nu Hilbert, în 1921, a repezit Nucu răspunsul.

— Cum adică ? Pîna acum 60 de ani, infinitul nu a preocupat mai îndeaproape pe matematicieni, s-a mirat doctorul Ursu.



David

— Ba da, infinitul a fost un punct de atracție și pentru matematicienii greci, chiar de dinaintea lui Aristotel. Numai că, pe la sfîrșitul secolului al XIX-lea, discuțiile în legătură cu problema infinitului au

devenit foarte înverșunate, de unde și izbucnirea lui David Hilbert, vizînd, bineînțeles, infinitul actual.

— Iarăși *Infinitul actual* ? Mi-ați promis o lămurire, sper că voi avea-o !

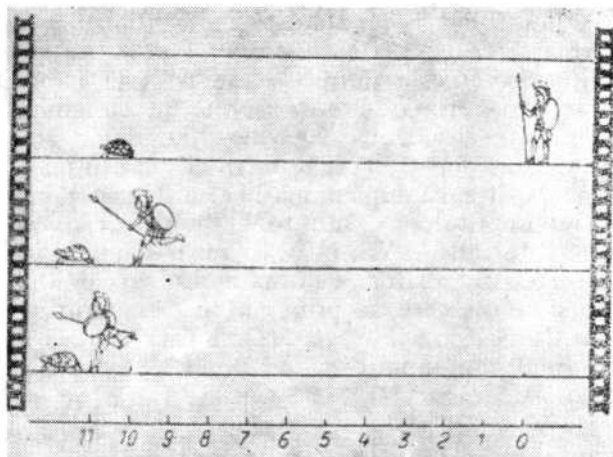
— Pe loc ! Pentru matematicieni, infinitul apare în două forme diferite: *infinitul potențial* și *infinitul actual*. *Infinitul potențial* este infinitul care ne este familiar și-l simțim aproape ori de cîte ori urmărim cu gîndul șirul numerelor naturale. După 99 vine 100, după 100 vine 101 și așa mai departe, oricît de mult am urmări acest șir de numere, știm că după numărul ce ni-l imaginăm pentru o clipă vine un altul cu o unitate mai mult. *Infinitul actual* însă, e cu totul altfel. Mai întîi, că nu ni-l putem imagina. Este ca un vis îngrozitor, a întins multe capcane matematicienilor și cei pe care i-a prins nu au mai putut scăpa de vraja lui. Ca să-l poți înțelege, ar trebui să te ridici undeva, deasupra mulțimii infinite ca de acolo să o poți privi *în toată totalitatea ei*.

— Am găsit în cartea lui Oskar Becker, *Fundamentele matematicii* (14), următoarea istorisire despre felul cum și-au imaginat mulțimile *infinite-actual*, doi dintre cei mai vajnici apărători ai acestei noțiuni: „Dedekind spunea în legătură cu conceptul de mulțime infinită că el își reprezintă această mulțime ca un sac închis care ar conține anumite lucruri determinate, dar care nu s-ar vedea și despre care nimic nu s-ar ști, afară de faptul că ele există și sînt determinate. Cîtva timp mai tîrziu. Cantor și-a exprimat reprezentarea sa despre mulțimea infinită, îndreptînd în sus statura sa colosală și descriind cu brațul ridicat un gest măreț, apoi privind în gol, a spus: — O mulțime mi-o reprezintă ca un abis”.

— Dacă tot ești cu cartea lui Becker în mînă, atunci te rog să ne citești și un fragment din *Fizica* lui Aristotel, în legătură cu infinitul. El s-a simțit obligat să trateze această problemă și, aș zice, a vrut să facă ordine cu ea, din cauză că filosofii greci dinaintea lui, folosind noțiunea de infinit

actual, ajunseseră la paradoxuri, adică la concluzii de-a dreptul monstruoase din punct de vedere logic.

— Cunosco și eu câteva dintre paradoxurile lui Zenon, de pildă al lui Ahile cel iute de] picior, care nu putea ajunge broasca țestoasă, ce era numai cu 100 de pași înaintea lui, deși alerga de 100 de ori mai repede, sau acela despre săgeată, care deși pornește din arc, stă pe loc...



**Ahile
și broasca țestoasă**

— Da, Zenon din Elea a imaginat paradoxurile acestea ca urmare a concepției sale despre infinitul actual, specu- lînd ipoteza că spațiul și timpul se pot împărți în mod nelimitat. Au mai existat și alți matematicieni greci din secolul al V-lea î.e.n., care au încercat să rezolve cuadra- tura cercului sau să determine volumul conului bazîndu-se pe operații care implicau acceptarea infinitului actual ; ei au ajuns astfel la rezultate ce contraziceau principiile de bază ale matematicii. De aceea, Aristotel a combătut această atitudine, mai ales în *Fizica* sa, arătînd că *noțiunea de infinit* nu poate fi pusă alături de celelalte noțiuni matematice ca numărul,

dreapta, planul etc. : „Infinitul există în potențialitate, nu este permis însă a lua existența potențială așa cum se face, de pildă, atunci când se consideră că un anumit material este o statuie în potențialitate pentru că va- fi (odată și odată) statuie. Nu tot așa se va întâmpla cu ceva infinit în potențialitate : nu trebuie să presupunem că va fi infinit în act... nu este permis să considerăm infinitul ca ceva concret, determinat, așa ca, de exemplu, un om, o casă, ci așa cum se vorbește despre zi, despre sărbătoare, a căror existență nu are sensul de entitate, ci totdeauna sensul de ceva care apare și dispare și, chiar dacă este de fiecare dată limitat, totuși este ceva diferit și mereu altfel..” (14, p. 87)

— Aceasta este și concepția infinitului pe care a folosit-o Euclid în opera sa : o extrapolare naturală a experiențe i noastre ancestrale. Părerile lui Aristotel cu privire la evitarea infinitului actual din speculațiile matematice au dăinuit peste două milenii, fiindcă și azi există mulți matematicieni care-1 reneagă. În secolul trecut a făcut-o Gauss, exprimându-și, în 1831, oroarea față de infinitul actual sub forma următoare : „protestez pentru folosirea mărimii infinite ca ceva definitiv, aceasta nu-i niciodată admisibil în matematică. Infinitul este numai un fel de a vorbi, adevăratul lui sens este o limită de care se apropie nedefinit anumite rapoarte, în timp ce altele pot crește fără limită”.



Carl Friederich Gauss

— Și cu toate aceste proteste, oricât de vehemente ar fi fost și vor mai fi, după ce Georg Cantor a introdus în matematică *teoria mulțimilor*, infinitul actual, numit încă și *transfinit*, a fost acceptat de majoritatea matematicienilor, iar Hilbert a declarat, plin de entuziasm : „nimeni nu ne va scoate din paradisul pe care Cantor l-a creat pentru noi”. Dealtfel, Beth afirma că : „scopul principal al teoriei mulțimilor constă în a dezvolta o metodă care permite să se evalueze infinitul”. Mai mult, el considera că Georg Cantor a prezentat „teoria mulțimilor ca pe o teorie matematică a infinitului actual”. (7. p. 130) Și, iată cum privește acad. prof. O. Onicescu rolul infinitului, în formarea noțiunilor : „Experiența a adus înaintea noastră un număr oarecare de copaci, dându-ne astfel posibilitatea să creăm noțiunea de copac, care nu se rezumă însă la expresia copacilor determinați pe care i-am întâlnit. Această expresie implică și capacitatea ca noțiunea să fie aplicabilă și acelor pe care-i vom întâlni mai departe... Noțiunea cuprinde, ca un atribut esențial, posibilitatea indefinită de a încorpora un număr nelimitat de indivizii ce îi reprezintă. Acest atribut al infinitului dă noțiunilor unitatea și valoarea lor”. De unde concluzia : „noțiunea de infinit posedă, în general,

funcția ontică de a ușura spiritului transformarea în noțiuni a datelor experienței, adică trecerea de la un plan al gândirii la altul". (15)

— Vă rog să-mi spuneți ce înțelegeți dumneavoastră prin *mulțime*, căci pentru mine cuvîntul are un înțeles vag și intuitiv.

— La această întrebare vă vom răspunde treptat. Deocamdată pentru Georg Cantor o mulțime avea același înțeles vag pe care îl avem cu toții, adică era „o reuniune de obiecte diferite numite elemente, care pot fi reale sau gândite, ca, de pildă, flori, puncte, numere, cuvinte, ființe și chiar mulțimi. Această definiție dată de Cantor este numită *definiția naivă* a mulțimii.

— De fapt. Cantor nici nu a dat o definiție pentru mulțime căci el afirma că o mulțime este o reuniune, adică tocmai o mulțime. De la această pseudodefiniție s-au și iscat multe neînțelegeri, iar Poincare nu a scăpat prilejul să mai arunce cîteva săgeți.



Georg Cantor

— Cu toate acestea. Cantor a dezvoltat teoria mulțimilor într-un mod așa de ingenios încît pînă la urmă a reușit să cuprindă în ea toate ramurile matematicii ! Și dacă ne-am întreba cum s-a putut întîmpla aceasta, răspunsul nu cuprinde în el nimic

misterios, ci este cît se poate de simplu. Anume, că la baza teoriei mulțimilor se află ideea de a compara două mulțimi finite cu același număr de elemente și de a stabili astfel o corespondență biunivocă, adică unu la unu între aceste elemente.

— Trebuie să recunoaștem că ideea a fost genială, fiindcă ea a dus la noțiunea de mulțimi echivalente, de aceea cred că e bine să clarificăm acest lucru printr-un exemplu. Să presupunem că avem o grămadă de 3 mere și alta de 3 copii; atunci fiecare copil poate lua cîte un măr. Dacă ar mai exista și o grămadă de trei nuci, alta de 3 pere, corespondența biunivocă se păstrează, fiindcă fiecare copil poate lua din toate grămezile cîte un fruct, fără ca vreunul dintre ei să nu găsească sau să-i prisosească vreunul. Aceste 4 grămezi se numesc mulțimi echivalente între ele. Dar, nu ar mai exista această proprietate de echivalență dacă una dintre grămezi ar fi formată din 4 mere sau ar fi fost numai doi copii !

— Să mai amintim de încă două idei ingenioase introduse de Cantor și anume acelea *de submulțimi ale unei mulțimi date* și de *mulțime vidă*.

— Aveți dreptate, aceste idei au condus la niște rezultate surprinzătoare. Deocamdată însă să precizăm că prin submulțimea unei mulțimi date se înțelege o mulțime formată numai dintr-o parte a elementelor unei mulțimi. Rezultă de aici că două mulțimi sînt identice dacă fiecare dintre ele este submulțimea celeilalte. Prin mulțimea vidă. Cantor a definit mulțimea fără nici un element.

— Nostimă idee : mulțimea vidă, adică submulțimea fără nici un element?

— Da, poate fi considerată și așa și tocmai de aceea submulțimile care cuprind cel puțin un element al mulțimii se mai numesc și *submulțimi stricte*. Dar să reluăm noțiunea de echivalență a două mulțimi. Dacă le privim mai îndeaproape, corespondența biunivocă dintre elementele lor ne îndreaptă către noțiunea de număr cardinal. Acele mulțimi sînt echivalente care au același număr cardinal, adică aceleași număr de elemente. Iată o

definiție importantă și cu viitoare consecințe nebanuite.

— Desigur. Fiindcă pe Cantor nu l-au preocupat numai mulțimile finite, ci mai ales acelea infinite și de aceea el a făcut un pas mai departe, considerînd corespondența biunivocă a două mulțimi infinite dintre care, pe una a ales-o să fie *șirul numerelor naturale*. Urmarea a fost de-a dreptul uluitoare, căci s-a aflat față în față cu infinitul actual !

— Nu înțeleg deloc cum și de unde a apărut, așa dintr-odată, infinitul actual ?

— Exact atunci cînd s-a stabilit corespondența biunivocă dintre elementele mulțimii infinite a numerelor naturale și elementele celeilalte mulțimi infinite. Să ne amintim de procesul petrecut în cazul mulțimilor finite. Înainte de a începe operația de corespondență, unu la unu, dintre elementele celor două mulțimi finite le-am privit pe acestea *în totalitatea lor*, ca și cum ar fi fost două grămezi, puse fiecare în sac. Și acum fiecare dintre grămezile infinite trebuie considerate, așa cum își imagina Dedekind, „ca un sac închis care ar conține anumite lucruri determinate, dar care nu s-ar vedea”.

— Imposibil de imaginat, dar, cu oarecare bunăvoință, se poate înțelege. E foarte adevărat că dacă izbutesc să închid toate, dar absolut toate numerele naturale într-un sac, și n-am lăsat niciunul deoparte, mă aflu în fața infinitului actual !

— Trebuie să recunoaștem că ideea lui Cantor a fost genială și nu trebuie să ne mire că atîția matematicieni s-au lăsat vrăjiți de ea ! Mai ales cînd au cunoscut concluziile stabilite de Cantor !

— Și care au fost acelea ?

— Prima, că s-au putut ordona și număra anumite mulțimi infinite, adică s-a ajuns la noțiunea de *număr cardinal al mulțimilor infinite* care se pot pune în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. Este generalizarea firească a noțiunii de număr cardinal al mulțimilor echivalente finite.

— Aș vrea să văd, printr-un exemplu concret,

cum poate fi stabilită corespondența biunivocă între șirul numerelor naturale și elementele unei mulțimi infinite !

— Nimic mai simplu ! Să scriem pe rînd șirul numerelor naturale și dedesubt să punem, unele sub altele, elementele mulțimii cu care vrem să stabilim corespondența '

$$\begin{array}{ccc} 12 & & 3. 4... \\ & > f > \\ 62 j & 62 & 2 \quad 62j \end{array}$$

— După cum vedeți împerecherile $1 - a_1, 2 - a_2...$ pot merge la nesfîrșit, de unde și concluzia că aceste două mulțimi sînt echivalente și au același număr cardinal care, bineînțeles că nu mai este un număr finit, ci un număr transfinit, un număr care în nici un caz nu se aseamănă cu numerele întregi, fiindcă dacă ar fi întreg ar face parte din șirul numerelor naturale ceea ce nu se poate, fiindcă acestea au fost luate în întregime lor. Acestui număr Cantor i-a dat numele de *alef zero* și este numărul cardinal sau puterea șirului numerelor naturale infinite. O primă consecință este că mulțimea numerelor pare sau a celor impare este echivalentă cu mulțimea numerelor naturale. Ați putea dumneavoastră, stimate doctore, să mi-o dovediți?

— Nu m-am gîndit niciodată că ar fi așa, dar din cele auzite acum, pare că m-aș putea încumeta și la această operație ! Să scriu deci șirul numerelor naturale și sub el șirul numerelor perechi, în așa fel încît să împerechez pe acelea ce sînt scrise unele sub altele :

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4... \\ 2, & 4 & 6 & 8... \end{array}$$

Și același lucru ar fi fost posibil dacă în șirul al doilea aș fi scris numerele neperechi.

— Ați trecut foarte bine examenul, dar acum avem o pretenție și mai mare; puteți considera că și mulțimea numerelor fracționare este tot așa de mare <aa numerelor întregi ?

— Asta nu ! Egalitatea numerelor perechi sau a

celor neperechi cu a numerelor întregi, bineînțeles când e vorba de mulțimea lor infinită a fost destul de simplu să mi-o imaginez. Dar acum, când mă gândesc că numai între 1 și 2 există o infinitate de numere fracționare, cum s-ar mai putea împerechea aceste infinități de infinități cu singura infinitate a numerelor întregi?

— Și totuși nimic mai simplu, iată cum vom proceda, ca să putem cuprinde toate numerele fracționare. Le așezăm în așa fel ca pe fiecare linie să se afle toate fracțiile care au același numitor :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & B & & & & n \\ \gg & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{B}{n} & \dots & & \frac{n}{4} \\ & n & n & n & & & 4 \end{array}$$

— Sînteți convins că am scris toate fracțiile ordinare posibile?

— Desigur, dar nu văd încă posibilitatea de a le număra, căci aici avem un tablou pătratic de numere, deschis spre infinit în două părți și nici într-un caz un singur șir.

— Ei, atunci hai să le punem într-un șir ! Aflați că putem face această scamatorie nu numai într-un singur fel, ci chiar în două moduri diferite. Am să vă arăt unul dintre ele. Să privim fracțiile așezate pe diagonalele succesive pe care le vom trage începînd de sus, de la dreapta spre stînga. Avem astfel:

$$\left(\frac{1}{1}\right) \text{ apoi } \left(\frac{2}{1} \text{ și } \frac{1}{2}\right) \text{ apoi } \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right) \dots$$

— Observați poate vreo regulă de formare ale acestor mulțimi din paranteză?

— Am impresia că da. în prima paranteză e o singură fracție, dar în a doua, ca și în a treia, suma numărătorilor și a numitorilor este aceeași, anume în paranteze a doua sumă este 3, iar în paranteza următoare 4 și, prin urmare, în paranteza a w-a ea trebuie să fie (n-| -l), adică aceea corespunzătoare fracțiilor :

$$\begin{matrix} n & n-1 \\ \text{„} > & \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ f & \frac{n-2}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix}$$

Mai mult chiar, toate parantezele sînt formate dintr-un număr finit de termeni.

— Dacă ați observat acest lucru înseamnă că jumătate din demonstrație ați și făcut-o ! Dacă o și terminați, atunci vă primim printre noi, fără nici un fel de protecție !

— Da, aș putea candida la acest titlu, căci am impresia că acum putem scrie aceste paranteze unele după altele și apoi, fiecărei fracții din șir să-i atribuim un număr, acela corespunzător lui în șirul numerelor naturale, adică:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ * & * & * & f & * & - & * & » & - & * & 4 \\ 112 & & 12 & & 3 & 12 & & 3 & & 4 & \\ i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10.. \\ 123456789 & & & & & & & & & & \end{array}$$

— Dar de acum înainte, dacă vă considerăm că faceți parte dintre matematicieni, aveți obligația să nu mai lipsiți de la ședințele noastre !

— Vă rog să nu mă flatați, meritul nu este al

meu, ci al dumneavoastră. Eu însă pot să adaug cu convingere că *numărul cardinal al fracțiilor ordinare este tot alef zero*.

— Cu alte cuvinte, acum puteți afirma că mulțimea fracțiilor ordinare este numărabilă, fiindcă toate mulțimile care pot fi puse în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale se numesc mulțimi numărabile.

— Iarăși mă puneți în încurcătură cu această nouă denumire. Trebuie să trag concluzia că există și mulțimi nenumărabile?

— Da, dar despre acestea vom vorbi mai târziu, când veți afla că-s și mai multe încă decât cele numărabile.

— Unchiul meu are dreptate, stimate doctore, căci cu mulțimea numerelor fracționare sau — ca să ne exprimăm mai corect — a numerelor raționale nu s-a încheiat încă socoteala mulțimilor numărabile. Mai înainte ca noțiunea de mulțime numărabilă să fi fost introdusă de Cantor, nimănui nu i-ar fi trecut prin minte să deosebească între ele sau să caracterizeze în vreun fel mulțimile infinite; acum însă aceste mulțimi au căpătat o caracteristică a lor și pot fi clasificate după acest specific.

— Ai accentuat un lucru foarte frumos, dragă Nucule. Asume acela pe care l-a afirmat mai înainte Beth, că prin teoria mulțimilor s-a găsit o metodă care permite să se evalueze infinitul — adică mulțimile infinite ! Drept să-ți spun că de-abia acum am înțeles ce a vrut să spună Beth !

— Mă bucură mult, stimate profesore, că-mi spuneți aceasta... Și e binevenită observația dumneavoastră, căci la rînd vine acum mulțimea *numerelor algebrice*.

— Numere algebrice? Iată, iarăși ceva nou pentru mine, despre care va trebui să-mi vorbiți, căci, după cum v-am prevenit, în admirația mea pentru matematică nu este implicată și documentarea.

— Nu mă sperie. Cred că, în curînd vă va fi mai ușor să mînuieți dumneavoastră numerele algebrice

decît ne-ar fi nouă să mînuim bisturiul, dacă ni l-aţi pune în mîină ! Numerele algebrice sînt acelea care corespund rădăcinilor unei ecuaţii algebrice, adică unei ecuaţii de forma :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

unde atît n , cît coeficienţii a_0, a_1, \dots, a_n sînt numere întregi.

— Atunci, printre aceste numere se află, alături de numerele întregi, şi cele fracţionare, toate numerele care sînt rădăcinile pătrate, cubice sau de alt ordin din numerele întregi, căci cu asemenea numere ca $\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[7]{2} \dots$ se exprimă rădăcinile ecuaţiilor de gradul doi, trei sau mai mare, nu-i aşa?

— Aveţi dreptate, însă printre numerele algebrice sînt şi alte numere care nu se pot exprima prin radicali, ca de pildă, rădăcinile unei ecuaţii de gradul cinci, şase sau ori-cît de mare ar fi un n finit ! Cantor a arătat că şi această mulţime, infinit mai numeroasă decît acelea despre care am vorbit pînă acum, este numărabilă. Cum? E mai greu de arătat, de aceea vă rog să mă credeţi pe cuvînt !

— Desigur că nu mi-aş permite să mă îndoiesc de cu-vîntul dumneavoastră. Acest caz mi-a amintit de o anecdotă povestită mai de mult, de un alt pacient al meu, tot profesor de matematică. Faptele, spunea el, s-au petrecut în Franţa, unde un nobil dorind să înveţe matematica şi-a tocmit un profesor. Dar oricîtă străduinţă îşi dădea profesorul, elevul nu înţelegea nimic. După cîteva lecţii, disperat că nu-i poate trezi înţelegerea, profesorul a adăugat deznădăjduit: — Dar vă rog să mă credeţi că este aşa vă spun pe onoarea mea ! La această replică nobilul s-a înclinat la faţă şi i-a răspuns uşurat: — De ce nu mi-aţi spus asta de la început domnule, căci va-ş fi crezut, fără să mai fi fost nevoie de atîta osteneală din partea dv Eu, neavînd printre strămoşi — cel puţin după cîte ştiu, — nici unul care să fi prutat ranguri de nobleţe, nu aş accepta adevărurile matematice decît după ce ar

fi demonstrate, însă de data aceasta voi face o excepție : în schimb, ași dori să-i amintesc tânărului nostru că la începutul discuțiilor noastre s-a lăudat că-mi va dovedi că partea este egală cu întregul din care a fost luată, dar după ce am stabilit că mulțimea numerelor pare sau a celor impare este echivalentă cu mulțimea numerelor întregi—ceea ce dovedește tocmai această proprietate —, domnia sa nici nu a mai catadicsit să-mi atragă atenția asupra acestui fapt, ca și cum nici nu ar mai fi meritat să-1 pună în evidență.

— Poate că nepotul meu nu a făcut-o anume, ca să aveți dumneavoastră singur bucuria descoperirii, mai ales că atunci când v-a amintit despre această posibilitate, nu prea erați dispus să o acceptați !

— Cred și eu ! Care minte sănătoasă ar accepta că $3=5$?!

— Dar nici nu este, fiindcă această proprietate apare numai când sărim gardul finitului și trecem în grădina infinitului actual.

— Ba, dragă Nucule, am să te contrazic și am să-ți arăt un caz când partea este egală cu întregul chiar în domeniul nostru finit. Spune-mi, te rog, ce culoare are o bucată de hîrtie pe care o tai dintr-o foaie întreagă de hîrtie albastră?

— Umbli cu șmecherii, Bădie I Crezi că dacă mi-ai luat apărarea, am să te acopăr? Desigur că și bucata de hîrtie are aceeași culoare albastră, adică partea este egală cu întregul, dar numai dacă ne referim la *calitatea* hîrtiei de a fi albastră și nu la *mărimea* bucății de hîrtie. Or, calitatea nu-i măsurabilă în unitățile cu care se măsoară cantitatea !

— Tot nepoți să ai, ca să aibă cine te taxa de șmecher ! Dacă-i așa poftim, arată-ți tu neșmecheriile tale.

— Dacă vrei, am mai putea zăbovi în această grădină a transfinitului. De pildă, am putea stabili și că $1+1 = 1$ sau că $1+1+1...+1 = 1$, unde prin 1 vom înțelege noua unitate din domeniul infinit, numită de Cantor alef zero și notată cu el cu N_0 .

— Așadar, vrei să ne arăți cum se pot aduna două mulțimi infinite numărabile și cât face suma lor? Dacă mi-ați fi pus această întrebare numai cu o oră mai devreme, cred că n-aș fi putut răspunde. Acum însă, sper că pot face eu însumi adunarea acestor două mulțimi infinite, folosind procedeul de corespondență biunivocă. Am să scriu cele două șiruri infinite unul sub altul și după aceea am să adun succesiv termenii lor :

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

Prin adunare rezultă :

$$a_1 + b_1 = c_1, a_2 + b_2 = c_2, \dots$$

Se obține astfel un șir infinit tot numărabil și

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots,$$

al cărui număr cardinal este tot alef zero, așadar

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 !$$

Drept să vă spun că am început să mă minunez eu singur de mine ! Iată-mă în stare să dezleg misterul pe care săptămîna trecută l-am considerat tot așa de imposibil ca și afirmația că partea este egală cu întregul, acela că $1 + 1 = 1$!

— Oare n-ar fi cazul să încercați și demonstrația părții a doua, anume că $1 + 1 + 1 \dots + 1 = 1$?

— Să încerc ! Cred că voi repeta exact procedeul pe care l-am folosit cînd am găsit suma a două mulțimi numărabile. Va trebui să scriu toate șirurile numărabile unele sub altele și să adun pe coloană, termen cu termen, elementele de același ordin din șirurile respective. Astfel am să obțin un nou element care face parte din șirul sumă, adică scriem mai întîi șirurile :

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

Apoi prin adunare avem:

$$di + 6i + \dots + />i = fi$$

$$di + 6_s + -.. + y>i = rj$$

$$d^* + 6 \gg + \dots + /> \gg = > \gg$$

De aici rezultă șirul numărabil $fi + r_a + \dots r_{\dots} + \dots$ care are drept număr cardinal tot pe alef zero !

— Perfect ! Și fiindcă sîntem la capitolul năzdrăvăniilor, n-ar fi rău să vă mai arăt una : După cum știți, în domeniul finitului numerele se împart în *pdre* și *impdre*, trccîndu-se de la o categorie la alta, prin adăugarea unei unități. Dacă 3 este impar, $3 + 1 = 4$ este par. Dar în domeniul infinitului această proprietate nu mai există căci $Ko + Xo$

— Mă gîndesc că n-ar fi exclus, a intervenit profesorul Toader, că tocmai această proprietate care-1 deosebește pe No de numerele întregi să-l fi făcut pe Cantor să înlocuiască denumirea de *număr cardinal al unei mulțimi în finite* numărabile cu aceea de *putere*. Și această dedublare mă duce cu gîndul la greci care și ei, tot dintr-un motiv filosofic, l-au deosebit pe unu de celelalte numere întregi, numindu-l *unitate* și nu *număr*.

— Ca unitate el apărea diferit de celelalte numere prin faptul că era singurul care avea proprietatea de a forma celelalte numere. În Europa, ideea că unu nu-i număr, ci unitate, a dăinuit pînă în secolul al XVI-lea și nu-s puține cărțile de aritmetică de atunci în care șirul numerelor naturale începea cu 2 ! Abia după multe și îndelungate discuții a fost acceptată părerea că și 1 este număr.

— Creď că ar mai trebui să accentuezi, dragă Teodor, că în aritmetica transfinită alef zero este considerat de Cantor ca număr întreg, desigur un întreg transfinit !

— Asta am înțeles-o eu, după cum v-am mai spus, dar am o nedumerire : vorbiți mereu de

mulțimi numărabile ; există oare și altfel de mulțimi infinite decât numărabile și dacă sînt, cum le putem deosebi de cele numărabile ?

— Da, există și mulțimi infinite de numere care *nu-s numărabile*, cu alte cuvinte în infinitatea lor ele cuprind mai multe elemente decât acelea pe care le are o mulțime infinită numărabilă. Aceste mulțimi nenumărabile se deosebesc de cele numărabile prin faptul că numai o *submulțime a lor* se poate pune în corespondență biunivocă cu o mulțime numărabilă, iar această operație se poate face *numai într-un singur sens*, nu și invers.

— Practic însă, nu-mi pot imagina o astfel de mulțime. Una care să cuprindă mai mult decât toate numerele întregi, fracționare și algebrice?

— Vă înșelași, stimate doctore, *mulțimea numerelor reale* vă este tot așa de binecunoscută ca termometrul sau siringa, ca să nu mai vorbesc de bisturiu. Nu-mi închipui că ați putea afirma că n-ați fi auzit de tc?

— Cel de la lungimea cercului?

— Exact, sau încă de „e”, cel ce reprezintă baza sistemului de logaritmi naturali, sau de numerele înscrise într-o tablă de logaritmi, cu care cred că și acum mai aveți uneori de-a face, ori de numerele prin care se exprimă valorile funcțiilor trigonometrice, de pildă $\sin 3^{\circ}20' = 0,0581$ sau $\operatorname{tg} 59^{\circ}46' = 1,716$. Aceste numere, pe care le-am exprimat sub formă de fracții zecimale numai în mod aproximativ, fac parte din mulțimea numerelor reale. Tot prin fracții zecimale infinite se exprimă și $j_c = 3,1415\dots$ sau $e = 2,7182\dots$. Dacă am considera o dreaptă pe care să stabilim o origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură, pe ea putem nota, alături de numerele întregi 0, 1, 2, 3... toate aceste numere reale. Operația vă este bine cunoscută și dumneavoastră în medicină atunci cînd stabiliți diferite grafice. decât întreaga mulțime infinită a numerelor întregi de pe această axă. Cantor a dovedit într-un mod foarte intuitiv și ingenios, așa cum sînt de altfel toate demonstrațiile lui, că această infinitate a numerelor reale cuprinsă între

0 și 1 întrece pe aceea a numerelor naturale, adică **nu mai** este numărabilă, folosind metoda „reducerii la absurd”.

Așadar, el acă mulțimea este numărabilă presupus începutși a numere reale dintre 0 și 1 să scrie aceste masub următorului sir .

1 :

2 : 0/ $b_j b$

3 : 0, $C_i C^{**} c_n \rangle_{-t}$

$n : 0, \langle i, M, M \dots$

Apoi a arătat că o asemenea numerotare nu este posibilă, căci ea *nu cuprinde toate numerele ce se află între 0 și 1*. În adevăr, el formează numărul: 0, $a_n \& !C_4 \dots$ și dovedește că acest număr, deși este cuprins între 0 și 1 *MM figurează în șirul* pe care l-a scris el, deoarece se deosebește de primul număr prin *prima cifră de după zero*, care aici este „, iar în primul număr este ; de al doilea număr se deosebește prin cifra a doua de după zero ; b_t în loc de b_z , ș.a.m.d. în felul acesta. Cantor a demonstrat că mulțimea infinită a numerelor reale cuprinse între 0 și 1 *MM poate fi numerotată*, adică este mai mare decât mulțime infinită a numerelor întregi. Numerele reale au deci o putere mai mare decât alef zero și fiindcă aceste numere au fost puse în corespondență cu mulțimea continuă a punctelor de pe o dreaptă. Cantor a dat acestei *puteri* numele de *puterea continuului* și a notat-o cu litera „C”.

— Bine, dar dacă mulțimea numerelor reale, adică a punctelor de pe o dreaptă are puterea continuului, atunci ce putere au mulțimile punctelor dintr-un plan sau ale aceloră din spațiu, care evident că sînt cu mult mai numeroase?

— Am să vă răspund, stimate profesore, la această întrebare tot cu o întrebare. Dacă iau două segmente AB

și CD unul de 1 cm, iar celălalt de 1 m, pe care din ele se găsesc mai multe puncte?

— Bravo, Nucule, mi-ai dat cel mai frumos răspuns posibil. E ușor de dovedit că ambele segmente au același număr de puncte. Pentru aceasta n-am de- cît să duc dreptele AC și BD care, se intersectează în punctul O și să rotesc în jurul lui O

dreapta AC . Ea va parcurge $\frac{1}{2}$ deodată segmentele AB și CD , C

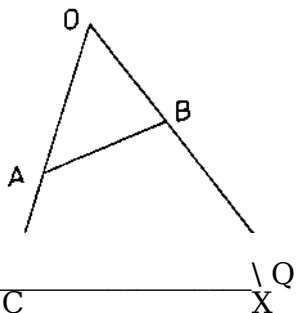


Fig 2

întîlnind cîte un punct de pe dreapta AB și de pe dreapta CD .

— Vedeți că nu m-ați prins cu mîta în sar ca altă dată? Folosind un raționament asemănător. Cantor a arătat că sînt tot atîtea puncte pe o dreaptă ca și într-un plan sau în spațiul nostru cu trei dimensiuni, ba chiar și într-un spațiu cu oricît de multe dimensiuni, numai în număr finit.

— Atunci „C” este ceKmai mare număr transfinit ?

— Nu ! Cantor a dovedit că există și alte numere transfinite, mai mari. El le-a numit alef unu, alef doi,... «**1, Xa- K. !**»

— Mă tem că prin acest răspuns ne-ai adus la marginea prăpastiei. Cum se poate împăca șirul infinit de alefi cu faptul că noi nu cunoaștem decît numai două feluri de mulțimi infinite, mulțimea numărabilă și aceea nenumă- rabilă?

— Și de data aceasta salvarea ne vine tot de la Cantor, cu rezultatele pe care le-a stabilit în aritmetica lui trans- finită. Mă refer la numărul cardinal al mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi date. Ca să urmărim mai ușor acest calcul, să alegem drept exemplu mulțimea finită $w: (1,2,3)$ cu trei elemente și să formăm toate submul- țimile ei. Numărul cardinal al ei este 3. Din ea se des- prind trei submulțimi cu cîte două elemente : $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2,3)$ și tot trei submulțimi cu cîte un element (1) , (2) , (3) . Dacă la acestea mai adăugăm

mulțimea vidă (0) și însăși mulțimea considerată (m) s-a format mulțimea M a tuturor submulțimilor mulțimii m , anume : $M : (1,2,3), (1,2), (1,6), (2,3), (1), (2), (3), (0)$.

— E clar că numărul cardinal al lui M este mai mare decît al mulțimii inițiale m . Cantor a dovedit că el este întotdeauna egal cu 2^n dacă n este numărul cardinal al mulțimii considerate. în cazul nostru el este $8=2^3$. Nu-i așa. Nucule ?

— Ba da, Bădie, și e interesant de remarcat că această operație se poate continua, adică pornind acum de la mulțimea M , să formăm o altă mulțime Afi a tuturor sub- mulțimilor mulțimii M , ș.a.m.d.

— Deși exercițiul acesta ar fi îmbietor atunci cînd ești de unul singur, acum cred că ne-ar trebui prea multă vreme ca să stabilim aici cele $2^8=256$ submulțimi formate din mulțimea M , așa că sînt de părere să ne lăsăm păgubași.

— Ba, eu, nu jur că odată, cînd voi fi prea obosit de la o operație, n-am să încerc să mă joc cu aceste mulțimi, care-mi par tot așa de odihnitoare ca și jocul cu cuvinte încrucișate !

— Dar procedeul de a forma în mod succesiv din mulțimea m pe M apoi pe M_{lt} nu are sfîrșit și vom ajunge astfel la mulțimile ale căror puteri sînt nesfîrșit de mari.

— Da, dar toate aceste mulțimi au ca numere cardinale numai numere finite, care figurează undeva în șirul infinit al numerelor naturale !

— Ai dreptate, acest număr cardinal al mulțimilor tuturor submulțimilor unei mulțimi finite, oricît de departe ne-am duce cu formarea lor, rămîne totuși un număr întreg finit.

— Atunci, hai să-l urmărim pe Cantor cînd în locul unei mulțimi finite consideră o mulțime infinită numărabilă T , adică de putere No . Dacă formăm mulțimea tuturor submulțimilor acestei mulțimi numărabile T , se obține o mulțime T_1 a cărei putere este un număr întreg trans- finit mai mare decît No , numit de Cantor *alef unu* (N_1), K care poate fi exprimat prin $N_1 = 2^{No}$

— Și cred că la fel găsim mulțimea T_2 a

submulțimilor ?

— Da, iar puterea mulțimii T_2 a fost numită de Cantor \aleph_1 -

— Atunci de aici, și în acest mod, a stabilit Cantor șirul alefilor: $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_n, \dots$? Admirabil rezultat ! îi dau dreptate lui Hilbert să fi vorbit de *Paradisul* lui Cantor și sînt convins că el a pășit în această lume a infinitului !

— Convingerea dumneavoastră este întemeiată, și dacă unchiul meu ar vrea ne-ar putea povesti cîteva amănunte din viața acestui matematician care a suferit mult, fiindcă nu a fost înțeles. El o cunoaște bine.

— Nu-i timpul potrivit, acum ar fi mai bine să ne citești tu ceva din articolul scris de Cantor despre *infinitul actual*, pe care-l numea *infinit propriu-zis*, ca să-l deosebească de *in finitul potențial* — *impropriu* — pentru el.

— Cu plăcere. Articolul a apărut în 1883 și se află, în parte, în cartea ce o avem aici pe masă (14, p. 315). Bineînțeles că am să aleg numai alineatele strîns legate de cele ce am discutat acum: „...eu introduc în considerațiile mele idei aparent străine. Căci este vorba de o lărgire, respectiv continuare a șirului de numere întregi reale, dincolo de infinit ; oricît ar părea de îndrăzneț acest lucru, eu îmi exprim totuși nu numai speranța, ci convingerea fermă că această lărgire va trebui să fie privită, cu timpul, ca ceva absolut simplu, adecvat, natural... noi distingem două forme în care a apărut infinitul matematic... în prima formă, ca infinit impropriu, el se prezintă cu *un finit variabil* ; în cealaltă formă, în care îl numesc infinit propriu-zis, el apare ca un infinit absolut determinat. Numerele întregi reale infinite, pe care le voi defini în cele ce urmează și către care am fost condus încă de mulți ani, fără să am conștiința clară că în ele posedăm numere concrete de semnificație reală, nu au absolut nimic comun cu prima dintre cele două forme, cu infinitul impropriu ;... ele aparțin formelor și efectelor infinitului propriu-zis”.

— Rîndurile acestea sînt zguduitoare, am avut

senzația că mă aflu chiar în taina procesului de creație : cînd spune „fără să am conștiința căiară...”

— Sau cînd prevede că „această lărgire va trebui să fie privită, cu timpul, ca ceva absolut simplu”, ceea ce, de altfel, s-a și întîmplat ! Dar hai, nepoate, mergi înainte.

— „Cele două *principii de generare*, cu ajutorul cărora sînt definite noile numere determinat infinite, sînt de așa natură încît prin influența lor combinată poate fi străpunsă orice îngrădire în formarea conceptului de număr real; din fericire lor li se opune un *al treilea principiu* pe care îl numesc principiul de *inhibiție* sau de *îngrădire*, prin care procesului de formare absolut nesfîrșit i se impun anumite îngrădiri succesive, așa încît noi obținem intervale naturale în șirul absolut infinit al numerelor întregi reale, intervale pe care eu le numesc *clase de numere*.

Prima clasă de numere (I) este mulțimea numerelor întregi finite, 1, 2, 3, 4,... *m*,... ; după ea urmează a *doua clasă* de numere (II), constînd din anumite numere întregi infinite care se succed într-o anumită ordine ; numai după ce se definește a doua clasă de numere se ajunge la a *treia*, apoi la a *patra* etc. Introducerea noilor numere întregi mi se pare a fi mai întîi de cea mai mare însemnătate pentru dezvoltarea și precizarea *conceptului de putere*. Fiecărei mulțimi bine definite i se atribuie o anumită putere, iar la două mulțimi li se atribuie aceeași putere, dacă ele se pot asocia biunivoc, element cu element. La mulțimile finite puterea coincide cu numărul de elemente, deoarece, astfel de mulțimi oricum ar fi ordonate au, după cum se știe, același număr de elemente. La mulțimile infinite, dimpotrivă, pînă acum n-a fost vorba, în genere, nici în lucrările mele, nici în altă parte, de un *număr precis* definit al elementelor lor; totuși, li se putea atribui și lor o anumită putere, complet independentă de ordonarea lor”.

— Ce captivantă expunere ! Prin ea am avut un tablou rezumativ al celor discutate azi și chiar mai mult: mie mi-a precizat un lucru care m-a

impresionat, *acela că la mulțimile infinite nu poate fi vorba de stabilirea unui număr precis de elemente !* Vedeți dumneavoastră, care sînteți obișnuiți cu aceste probleme, le priviți ca naturale și aproape că nici nu vă mai gîndiți să le puneți în evidență, dar mie, care pînă acum mi-au fost străine, fiecare amănunt nou îmi provoacă aceeași tresărire de uimire ca și atunci cînd găsesc, într-o galerie de tablouri, unul care-mi țintuiește privirea. Iertați-mi întreruperea, dar simțeam nevoia acestei destăinui, înainte de a asculta mai departe, adică de a gusta apa chiar de la izvor !

— Ba, ea a fost bine venită și cu tîlc pentru noi
1 Mai ales pentru cel ce ne citește, căruia i-am dat libertatea alegerii textului.

— Da, norocul meu este că am citit de mai multe ori acest articol și nu-mi este greu să trec peste părțile ce ne-ar complica existența ! Acum însă merg în continuare : „Cea mai mică putere a mulțimilor infinite, după cum era ușor de justificat, trebuia să fie atribuită acelor mulțimi care se pot asocia biunivoc *primei clase de numere* și de aceea să aibă aceeași putere cu ea. Dimpotrivă, pînă acum a lipsit o definiție, tot așa de simplă, firească pentru *puterile superioare*. Clasele noastre de numere menționate mai sus, ale numerelor întregi reale determinat—infinite, se dovedesc acum reprezentanți naturali, manifestîndu-se într-o formă unitară, ai puterilor mulțimilor bine definite, ordonate crescător în succesiunea regulată. Eu arăt în modul cel mai precis că puterea celei de-a doua clasă de numere (II) nu este numai diferită de puterea primei clase de numere, ci că ea este și în realitate puterea imediat superioară : de aceea, putem să o numim *a doua putere* sau *puterea clasei a doua*. La fel, a treia clasă de numere dă definiția celei de-a *treia puteri* sau *puterii clasei a treia* etc.”

— Aici am găsit o expresie care n-am înțeles-o deloc : „mulțimi bine definite, ordonate crescător în succesiunea regulată”. Ce înseamnă asta ?

— Asta înseamnă introducerea la o nouă surpriză ! Pe lîngă *numerele cardinale transfinite*,

Cantor a introdus și *numerele ordinale transfinite*, și de aceea aici vom întrerupe lectura, ca să discutăm ceva despre *numerele ordinale*.

— După cum știți, în aritmetica obișnuită, alături de numerele cardinale adică întregi și naturale: 1,2,3... se întâlnesc și numerele ordinale, prin care se precizează locul pe care-l ocupă un obiect care se află într-un șir de obiecte, așezate într-o anumită ordine : primul, al doilea, al treilea ș.a.m.d. Cantor a extins această noțiune de număr ordinal finit și la numerele sau puterile transfinite. Așa că, alături de puteri sau *numere cardinale transfinite* apar și *numerele ordinale transfinite*. Însă, de data aceasta, lucrurile se complică : în cazul mulțimilor finite, numărul cardinal se confundă în valoare cu cel ordinal, fiindcă, după cum s-a exprimat Cantor: „la mulțimile finite puterea coincide cu numărul elementelor, deoarece astfel de mulțimi, *oricum ar fi ordonate*, au același număr de elemente”; în cazul mulțimilor infinite, numerele cardinale transfinite

nu mai sînt egale cu acelea ordinale transfinite. Ca să fie mai clar, luăm un exemplu : Considerăm trei mulțimi nite ordonate, binecunoscute nouă :

1. mulțimea numerelor naturale: $1, 2, 3, \dots$
2. mulțimea numerelor întregi: $0, 1, 2, 3, \dots$

fl. mulțimea numerelor raționale : $\dots - \dots (m, n)$.

Toate aceste mulțimi au același număr cardinal, alef zero (\aleph_0), transfinite !

— Eu aș vrea să insist și asupra noțiunii de *ordonare*, care este intim legată de numărul ordinal al mulțimilor infinite. Se spune că o mulțime este ordonată atunci cînd între elementele ei există o *relație de ordine*, notată de obicei prin semnul „mai mic” ($<$). Această relație de ordine se exprimă prin următoarele trei condiții pe care trebuie să le îndeplinească trei elemente oarecare x, y, z , din mulțimea m , notată în acest caz ($m, <$) :

1. Dacă x nu este mai mic decît y , atunci rezultă $x=y$ sau $y < x$.

Q.. Dacă x nu este egal cu y , atunci rezultă $x < y$ sau $y < x$. &. Dacă $x < y$ și $y < z$ atunci rezultă $x < z$.

— Dacă la a este condiții se mai adaugă și condiția suplimentară, anume că, în toate submulțimile n nevide din m să existe un cel mai mic element x , în așa fel că pentru orice alt element y din n să avem $x < y$, atunci se spune că mulțimea m să existe un șir este *bine ordonată*.

— Dar acestea sînt condițiile ordonat 1

— Ai dreptate, Bădie. Cantor a generalizat această numire dînd-o la mulțimile infinite bine ordonate, obser- vînd că fiecare parte a unui șir este tot un șir. în plus, el a definit *asemănarea* a două mulțimi bine ordonate, sau șiruri ($w, <$) și ($m', <$)

$<$), anume acele șiruri sînt *asemenea* în care se poate stabili o corespondență între elementele lor, care să păstreze *ordinea*.

— Asta vrea să însemne că dacă în mulțimea m avem $x < y$ și acestor două elemente din m le corespunde în mulțimea m' elementele x' și y' , atunci și $x' < y'$.

— Adevărat. Această relație este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Dacă numim $NO(m, <)$ familia tuturor mulțimilor bine ordonate asemenea cu $(m, <)$, acest număr $NO(m, <)$ se numește *numărul ordinal al mulțimii m* . Dacă se dau două mulțimi bine ordonate, pentru care $NO(m, <) = NO(m', <)$, atunci aceste două mulțimi au și același număr cardinal. Dar reciproca acestei teoreme nu-i adevărată, căci o aceeași mulțime m poate avea diferite moduri de a fi bine ordonată, iar aceasta duce la alte numere ordinale. Și acum, dacă ne întoarcem la acel articol din 1883 al lui Cantor, aș mai avea de citit de acolo numai un scurt fragment (p. 326) : „Dacă eu concep infinitul astfel, așa cum am făcut aici precum și în încercările mele mai vechi, atunci de aici decurge pentru mine o adevărată plăcere, căreia mă dedic plin de mulțumire, văzînd cum întregul concept de număr, care în finit are numai *fundal de număr*, se despică oarecum în două concepte atunci cînd ne ridicăm spre infinit, anume în conceptul de *putere*, independentă de ordinea în care este dată o mulțime, și în conceptul de *număr*, care este legat în chip necesar de o ordine conformă unei legi a mulțimii, ordine datorită căreia această mulțime devine bine ordonată. Și dacă iarăși cobor de la infinit la finit, atunci văd tot așa de clar și de bine cum cele două concepte devin unul și se revarsă împreună în conceptul de număr întreg finit”.

— Bravo, Nucule, cele citite de tine acum mi-au transmis aceeași „adevărată plăcere” pe care a simțit-o și Cantor 1 Adîncă și mare bucurie, pe care trebuie să o materializăm numaidecît cu o cafeluță fierbinte !

— Eu doresc ceva mai mult, simt că nu m-aș

putea despărți de acest matematician care în sufletul lui era desigur și poet, fără să cunosc amănunte din viața lui, căci altfel, aș spune că în această scormonire prin infinit, freamătă nebunia.

— Și dacă veți afla că a murit bolnav de nervi? Că el singur spunea că după o criză de nervi vedea mult mai clar problemele pe care și le pune și putea stabili rezultate noi ?

— De ce ați fost așa de crud, stimate profesore? Pînă ce venea Bădia, iubitul nostru doctor s-ar fi complăcut într-o pasivitate caldă, așa l-ați trezit la realitatea de care crede că scapă numai venind printre noi ! Ca să dizolv această impresie am să mai citesc o scrisoare pe care a scris-o Cantor lui Richard Dedekind după 16 ani de la publicarea articolului din care am citit adineauri.

— Mă bucur că o faci și că ți-am descoperit o trăsătură de caracter ce nu o arăți prea des.

— Degeaba, nu vă iert, stimate profesore. Așa că citesc scrisoarea tot supărat: „Știți că încă de mulți ani am ajuns la un șir bine ordonat de puteri sau numere cardinale transfinite, pe carele numesc *alefuri* N_0 , N_1 , N_2 ,...; N_0 , înseamnă puterea mulțimilor „numărabile” în sens obișnuit, N_1 este numărul cardinal imediat mai mare, N_2 următorul mai mare, etc... Marca întrebare este dacă în afară de alefuri există și alte puteri de mulțimi; încă de acum doi ani sînt în posesia unei demonstrații că nu există altele așa îneît, continuului liniar aritmetic (totalității numerelor reale) i se asociază un anumit alef ca număr cardinal”. Scrisoarea aceasta este extraordinar de interesantă, dar partea aceea la care mă refer nu o pot citi acum, ci vom revedea-o mult mai tîrziu. De altfel, văd că Bădia a venit, așa că are cuvîntul !

— Să nu aveți prea mari pretenții, am să vă povestesc doar cîteva crîmpeie dezlîinate, de care-mi aduc aminte, căci am citit mai demult frumoasa carte a lui E. T. Beli despre marii matematicieni (16). Știu că Georg Cantor avea o înclinație vădită pentru matematici și filosofie, iar talentul lui în această direcție s-a arătat de timpuriu. Însă tatăl

lui dorea ca el să se facă inginer și, deși hotărîrea l-a amărît, nu a protestat. Nu a făcut-o, pe de o parte fiindcă își iubea mult de tot părinții și pe de altă parte, fiindcă era o fire supusă și timidă. Dar tatăl lui a înțeles — singur sau de la alții? — că a comis o mare greșală împiedicîndu-l să urmeze matematicile și a revenit asupra dispoziției sale. A rămas o scrisoare a lui Cantor către tatăl său în care își exprimă, fericit, recunoștința că i se permite să studieze matematica ! Așa că s-a înscris, la 17 ani, ca student la Universitatea din Zurich, dar după un an, murind tatăl lui, s-a mutat la Berlin. Aici a trecut, numai după patru ani, examenul de doctorat cu trei dintre cei mai renumiți matematicieni de atunci L. E. Kummer, K. Weierstrass și L. Kronecker. Îndată după aceea a fost numit docent la Universitatea din Halle, unde a ajuns profesor. Dar pînă la vîrsta de 29 de ani, adică pînă în 1874, cînd a apărut articolul „Despre o proprietate a totalității numerelor algebrice reale”, lucrările publicate de el pînă atunci erau destul de cuminți ca să nu atragă decît atenția specialiștilor, care le aprobau fără prea multă vorbărie. Această lucrare însă ieșea din comun și de aceea a stîmuit nu numai interes, dar și agitație. În ea era vorba, pe de o parte de mulțimea numerelor algebrice despre care Cantor arăta că este numărabilă și pe de altă parte despre mulțimea numerelor reale, pe care o prezenta ca pe o mulțime nenumărabilă.

— Amănuntul acesta mă flatează ! înseamnă că nu arăta chiar așa de rău mirarea mea față de mulțimile numărabile și nenumărabile, dacă dîtai matematicieni au reacționat la fel !

— Din contră, căci atunci nici acești mari matematicieni nu cunoșteau mai multe despre asemenea mulțimi decît dumneavoastră. Acesta a fost și motivul care a făcut ca lucrarea să fie întîmpinată cu entuziasm și admirație de unii, cu ironie și dezaprobare de alții. Aceste sentimente s-au accentuat și s-au intensificat, deoparte și de alta, la apariția altor articole în care Cantor a

prezentat numerele cardinale transfinite, numerele ordinale transfinite și toate



Charles Hermite

problemele legate de teoria numerelor reale, concepută din acest punct de vedere. Să încep numind câțiva dintre cei ce l-au admirat și încurajat. De pildă, matematicianul și filosoful francez L. Couturat, în cartea cu titlul *Despre infinitul matematic*, pe care a publicat-o în 1896 la Paris, afirma că datorită lui Cantor, „numărul cardinal a renăscut, ca pasărea Phonix, din propria ei cenușă”. Frege și Russell, pe care i-am mai pomenit, au adoptat teoria mulțimilor și au folosit-o ca punct de plecare în problemele cercetate de ei. Cunoscutul matematician suedez Mittag-Leffler, care fundase și conducea revista „Acta Mathematica”, i-a publicat în revista sa mai multe articole și l-a încurajat să țină piept celor ce-l atacau. Mittag-Leffler povestește că acest gest al lui l-a impresionat pe Cantor într-atît încît îi scria în fiecare săptămînă cîte o scrisoare. În una dintre ele îi arăta că a primit o scrisoare de la matematicianul francez Ch. Hermite, dar „elogiile cu care m-a copleșit și care au pentru mine mult preț, le merit așa de puțin încît nu mă pot hotărî să le public, ca să nu fiu învinuit că m-am lăsat orbit de ele”. Laude

pe de o parte, critică și ironie pe de alta. De la cine? Întîi de la cel mai de seamă matematician și filosof francez de atunci, H. Poincare. Dar Poincare l-a combătut cu ironie și cu eleganța specifică omului nobil sufletește, așa că Georg Cantor a putut



Richard

suporta durerea acestei neînțelegeri. Al doilea matematician care l-a atacat a fost chiar profesorul pe care el l-a admirat, Leopold Kronecker. Critica desfășurată de Kronecker a atins forme atît de violente încît, după cîtiva ani a distrus echilibrul mintal al lui Cantor. La 10 ani după publicarea primului său articol, adică în 1884, s-a manifestat prima criză de nervi și a trebuit să fie internat într-un spital. Nu împlinise 40 de ani cînd speranța lui de a ajunge profesor la Berlin s-a năruit ! Mai mult, a pierdut încrederea în sine, iar viața lui va pendula, de aici înainte, între Universitate și spital. După ce a revenit la Universitate a cerut să i se schimbe catedra de matematici în alta de filosofie, deși scrisorile care le scria lui Richard Dedekind dovedea că el continua să se ocupe de teoria mulțimilor.

— Și cine era Richard Dedekind?

— Un foarte mare matematician, care a trăit 85

de ani și a lucrat în matematică pînă la sfîrșitul vieții, aproape exclusiv în domeniul teoriei numerelor iraționale, al teoriei numerelor algebrice ș.a., dar n-a fost prea bine înțeles atunci. De altfel, el a preferat să lucreze retras de lume căci, deși la 26 de ani fusese numit profesor la Școala Politehnică din Zurich, după 5 ani s-a retras ca să se întoarcă la Brunswick, locul lui de naștere.

— Și al lui Gauss !

— Da. Dedekind a fost chiar ultimul elev al lui Gauss. La Brunswick a rămas profesor la școala superioară tehnică timp de 50 de ani. Era mai bătrîn decît Cantor cu 14 ani și e sigur că în 1899 îl cunoștea pe Cantor și discuta cu el. Iată de unde se știe asta. în acel an. *Calendarul matematicienilor* arăta că în 4 septembrie 1899 a murit Dedekind. Această știre l-a amuzat pe matematician, l-a făcut să-i scrie editorului, arătîndu-i că în acea zi poate afirma după notele din jurnalul lui, că a avut bucuria să discute despre „sisteme și teorie” cu invitatul și distinsul lui prieten Georg Cantor, din Halle”.

— Așadar, Cantor era atunci la 15 ani după prima lui criză?

— între timp, lucrările lui Cantor ajunseseră să fie tot mai apreciate. însuși Kronecker, înainte de a muri, în 1891, s-a împăcat cu Cantor, recunoscînd oarecum valoarea cercetărilor sale.



Leopold Kronecker

— În istoria științelor se cunosc multe dispute înver-șunate, dar puține s-au încheiat cu asemenea rezultate dezastruoase. De aceea mulți istorici ai matematicii sînt de părere că vina bolii lui Cantor nu o poartă numai Kronecker, ci și echilibrul psihic al lui Cantor.

— Și eu cred la fel, stimate profesore. Atunci a fost acuzat Kronecker fiindcă avea un caracter imposibil și nimeni dintre colegii lui nu-l simpatiza. De altfel, se spu - nea despre el cam așa: „Acest sceptic nu se adresează celor vii, ci, cum o mărturisește el singur, celor ce vor veni după el". Era pesimist și caustic, dar era de bună credință în critica pe care o făcea, potrivit cu convingerile sale. E bine cunoscută considerația lui că „rezultatele celor mai profunde cercetări matematice trebuie să se exprime sub o formă simplă, prin proprietățile numerelor naturale".

— El care nu accepta nici existența numerelor iraționale altfel decît ca un mijloc de lucru, cum ar fi putut admite că numerele iraționale și transcendente pot fi mai multe decît numerele întregi, fracționare și algebrice luate la un loc? Cu atît mai mult cu cît — și asta îi obiecta el lui Cantor

— a stabilit teorema asupra mulțimii acestor numere, fără să arate nici o metodă practică de a construi măcar un număr transcendent !

— Nu te contrazic, dar ceea ce este sigur, e că Georg Cantor a murit, în 1918, într-un spital de nevroze din Halle și că în boala lui se amestecă și neîndurătoarea critică a lui Kronecher.

— Dragă Bădie, nu știu ce impresie i-a făcut toată această poveste iubitului nostru doctor, că văd că tace chitic, dar mie, drept să-ți spun, deși o știam în părțile ei esențiale, mi-a lăsat un gust amar în gură. De aceea, te rog să nu mă lași să plec așa de la mata. Știu eu o anumită carte, și un anumit fragment din ea, care ar avea darul să ne redea la toți buna dispoziție pe care am avut-o când am venit aici.

— Dacă există un asemenea leac, cred că toți l-am accepta cu nerăbdare !

— Există, cum să nu, și fără anestezic sau bisturiu. Se cheamă *Matematica și logica* și cuprinde părerile lui Poincare, după ce a citit articolul tânărului Georg Cantor despre infinitul actual (5, p. 153). Deci să căutăm leacul cu pricina:

„De multă vreme noțiunea de infinit a fost introdusă în matematică, dar acest infinit era ceea ce numesc filosofi o *devenire*. Infinitul matematic nu era decît o mărime ce putea crește dincolo de orice limită : era o mărime variabilă despre care nu se putea spune că a depășit *toate limitele*, ci numai că *le va depăși*. Cantor a hotărît să introducă în matematică un infinit actual, adică o mărime care nu-i numai în stare să depășească orice limite, dar care este considerată că le-a și depășit. Au fost puse probleme ca acestea : Există mai multe puncte în spațiu decît numere întregi? Există mai multe puncte în spațiu decît în plan? etc. Și astfel, numărul numerelor întregi, acela al punctelor din spațiu etc., constituie, ceea ce numește el un număr cardinal transfinit, adică un număr cardinal mai mare decît numerele cardinale cunoscute. Și el s-a amuzat să compare aceste numere cardinale

transfinite... Mulți matematicieni s-au lansat pe urmele lui și și-au pus multe întrebări de acest fel. Și s-au familiarizat așa de bine cu numerele transfinite, încât au ajuns să considere că teoria numerelor finite depinde de aceea a numerelor cardinale ale lui Cantor. După părerea lor, ca să predai aritmetica într-un mod cu adevărat logic, ar trebui să începi prin a stabili proprietățile generale ale numerelor cardinale trans- finite și apoi să distingi printre ele o foarte mică clasă, aceea a numerelor întregi obișnuite. Prin acest înconjur s-ar putea ajunge să se demonstreze toate teoremele relativ la această clasă mică (adică toată aritmetica și algebra noastră), fără să folosești nici un principiu străin de logică. Această metodă se opune, evident, oricărei psihologii sănătoase; desigur că nu a procedat așa spiritul omenesc când a construit matematica; sper că acești autori nu intenționează să o introducă în învățământul secundar. Dar este cel puțin logică, sau, mai bine zis, corectă? Ne îndoim !".

— A doua oară îți mulțumim astăzi, Nucule ! Extraordinară experiență psihologică aceea de a re trăi impresiile pe care le-a produs noțiunea de infinit actual introdusă pe neașteptate asupra unui mare matematician și totodată să știi cele ce s-au petrecut un veac mai târziu și să înțelegi că problema care a provocat toată neliniștea și tulburarea atunci a devenit azi un adevăr elementar pe care-l învață copiii chiar din cursul elementar.

— Rămîne să ne spui care-i programul de miercură viitoare, stimat ghid !

— Cred că am putea intra în miezul problemei fundamentelor, mai ales că și în articolul lui Poincare au fost cîteva aluzii într-acolo !

— Adică, vrei să spui că vom ataca logicismul I

— întocmai ! El e cel mai aproape.

IV

O CALE CU HÎRTOAPE

— Zilele trecute am citit ceva care m-a mirat foarte tare.

— Îmbucurător, dragă Nucule, căci după părerea lui Aristotel, omul a început să facă filosofie pentru că se mira de tot ce era în jurul lui. Înseamnă că ai stofă de filosof și de aceea tare am vrea să aflăm ce lucru anume ți-a stîr-nit mirarea ?

— Trec peste înțepătura dumneavoastră catifelată, stimate profesore, ca să ajung la subiect. N-am știut și nici nu mi-a venit să cred că abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea s-a stabilit legătura strînsă care există acum între logică și matematică. Eu credeam că ea a existat întotdeauna.

— M-a mirat și pe mine acest lucru, numai că pe atunci tu nu erai încă pe lume și-mi închipui că și tu. Teodor, ai pățit la fel ?

— Nu și da. Nu, căci istoria matematicii ne arată că pînă în secolul al XIX-lea precizia logică și rigoarea matematică nu duceau casă bună nici cu matematicienii de rasă. Oare nu mai știți cîte năzbîtii a fost în stare să debiteze genialul Euler despre numerele imaginare ? Sau ați uitat de eforturile uriașe ale tînărului Abel, în lupta lui contra seriilor de convergență dubioasă, pe care matematicieni de seamă, printre care se găsea și Euler, le admiteau în calcule iară să le stabilească, în prealabil, convergența ? Iată cum descrie Abel această strădanie unui prieten : „Aș consacra toate

forțele mele ca să răspîndesc lumina în imensa obscuritate ce domnește azi în analiză" ! Așadar, cred că-mi dați dreptate dacă nu m-a mirat această tentativă de a



Niels Henrik Abel

lega mai strîns logica de matematică. Din toate părțile se arătau semne că venise timpul să se stabilească această legătură ! Totuși, într-un fel m-a mirat și de aceea chiar am recitat povestea lui George Boole cu gîndul ca să o povestesc aici. Mă bucură că ați venit și dumneavoastră, dragă doctore, căci față de data trecută, calea de azi va fi mai ușoară, deși s-ar putea ca, atunci cînd ne-o fi lumea mai dragă, să dăm de vreo hîrtoapă.

— Am venit, fiindcă întîlnirea aceasta este pentru mine un strașnic deconectant, mai ales cînd se întîmplă să fi avut și niște operații grele ... Sînt foarte curios să aflu cine a fost și ce a făcut George Boole ?

— Cine ? Îl las pe Bertrand Russell să vi-l recomande : „Matematicile pure au fost descoperite de Boole într-o lucrare pe care a intitulat-o *Legile gîndirii*".

— Drept să vă spun că, pentru mine, această frază nu are nici un sens ! Adică toți matematicienii care au trăit pînă ce a scris Boole cartea aceasta,

habar n-aveau de matematica pură ?

— Ai dreptate, dragă doctore ! Fraza aceasta are un sens pentru noi, care știm ce a gândit Russell, pentru ceilalți însă e cam ermetică. De aceea, am să-mi ajut colegul, și pe dumneavoastră, completînd-o cu fraza ce urmează în cartea lui Russell: „Opera lui se referă la logica formală, iar aceasta este același lucru ca și matematica”.

— Acum, dragă Toader, am înțeles mai mult de-o grămadă ! Am dat oare de-o hîrtoapă de cum am pornit la drum ?

— Văd că v-ați găsit și dumneavoastră nașul, stimată profesoare ! N-ar fi mai bine să începeți chiar cu biografia ?

— Da, așa gîndesc. George Boole s-a născut în Anglia, la Lincoln, în 1815 și era fiul unui mic negustor. Deși avea o inteligență remarcabilă și dorea să învețe carte, nu s-a putut. De ce ? Pentru că, spune E.T. Bel (16, p. 464) : „Dacă urmărim descrierile scriitorilor englezi despre *acele frumoase timpuri de odinioară*, a fi fiul unui mic negustor însemna să fii osîndit, prin predestinare. Clasa socială la care aparținea tatăl lui Boole era tratată cu dispreț. Așadar, copilului George Boole nu i-a fost deschisă, din cauza originii sale sociale, decît ușa școlii elementare. Cînd a terminat-o, tatăl lui l-a încurajat cum a putut. Matematică știa mai multă decît învățase băiatul la școală și nu i-a fost greu să-1 îndrume. Cu latina și greaca a rezolvat-o destul de ușor, fiindcă era prieten cu librarul din oraș. El avea și cărțile necesare, și cunoștea gramatica latină. După cîteva lecții pregătitoare, George Boole a putut învăța singur și încă așa de bine că la 12 ani a reușit să traducă în englezește și în versuri o odă a lui Horațiu. Cîtă bucurie și fericire trebuie să fi simțit tatăl ne-o putem închipui din faptul că a făcut el ce-a făcut și oda feciorului său a apărut în ziarul local. Evenimentul nu a rămas necomentat. În același ziar au apărut articole, unele de laudă, dar în cele mai multe se pune la îndoială faptul că traducerea a fost făcută de George Boole. Profesorul de latină, considerînd

traducerea ca atare, arăta ce greșeli gramaticale sau de construcție au fost comise de autor. Ultima critică l-a bucurat nespus pe Boole, fiindcă în felul acesta a putut întrebuița expresiile corecte pe care altfel nu ar fi avut de unde le cunoaște ! Antrenamentul cu limbile clasice i-au pregătit calea către limbile moderne : franceza, germana și italiana. De la 16 ani, George Boole a căpătat un post de învățător. Era tocmai ocupația de care avea nevoie ; cu banii câștigați își ajuta părinții și avea totodată destul timp pentru studii. La 20 de ani s-a hotărît să deschidă el însuși o școală particulară. Cu această ocazie, cercetările sale, care pînă atunci erau de partea literară, s-au îndreptat către matematici. Căci trebuind să predea și matematica a observat că manualele de matematici erau prost întocmite. S-a înfuriat și s-a hotărît să compună el altele mai bune. Comandîndu-și cărți a vrut să-și aleagă pe cei mai buni profesori de atunci. Astfel a cunoscut printre altele *Mecanica cerească* a lui Laplace și *Mecanica analitică* a lui Lagrange. Aceste lucrări l-au condus la cercetări proprii și ca să verifice rezultatele obținute a intrat în corespondență cu diverși matematicieni. Printre aceștia, matematicianul scoțian D.F. Gregory — care conducea revista matematică din Cambridge, ce o întemeiasă tot el în 1837 — i-a publicat cîteva articole.

— Cum ? Vreți să spuneți că absolut nimeni nu l-a ajutat să înțeleagă problemele de matematică superioară și chiar să poată găsi rezultate originale ?

— Desigur, el nu a părăsit Lincoln-ul, iar acolo ... cine să-l îndrume ? A fost un *autodidact* în cel mai strict sens al cuvîntului și tocmai de aceea am ținut să vă povestesc această viață, ieșită din comun. A cunoscut matematica, s-ar putea spune din întâmplare, dar cînd a început să citească, desigur că fără ni:i un sistem, trecînd de la una la alta și revenind pînă ce i se lămurea vreo problemă sau o noțiune, s-a trezit că-i place matematica altfel decît



Joseph Louis Lagrange

îi plăcuseră pînă atunci celelalte studii literare și a fost în stare să descopere adevăruri pe lîngă care marele Lagrange trecuse fără să le observe. Articolele publicate i-au adus noi prieteni, matematicieni competenți din Cambridge și aceștia l-au invitat să vină acolo ca să urmeze cursurile Universității. Era prea tîrziu, el nu și-a părăsit școala sa și nici familia ce era acum în seama lui. Dar printre prietenii pe care și-i făcuse și cu care era în corespondență se afla un vestit profesor de la Universitatea din Londra, Augustus De Morgan. El a tipărit în 1847 o carte cu titlul *Logica formală* în care se atrăgea pentru prima oară atenția asupra aspectului matematic al logicii și asupra analizei ce se putea face din punct de vedere logic, al simbolurilor operaționale și asupra legilor matematicii. George Boole a fost cucerit de aceste probleme. El studia pe atunci cartea de algebră, publicată în 1836 de George Peacock, o carte scrisă într-o formă cu totul deosebită de aceea a altor manuale de algebră. Aici se discutau principiile fundamentale ale algebrei și se punea în evidență caracterul ei simbolic. Peacock stăruia asupra faptului că literele din expresiile algebrice *nu trebuie privite ca numere*, ci, în special, ca niște

simboluri arbitrare, care se pot combina între ele prin anumite operații ce se reprezintă prin semnele -f- sau X, ultimul semn putînd fi și omis dacă literele se scriu alăturat. Sub impresia acestor două cărți, Boole a scris atunci o broșură, pe care a publicat-o, tot în 1847, *Analiza matematică a logicii*, în care a tradus logica în limbajul algebrei. Lucrarea a fost bine primită de matematicienii englezi, iar Morgan a considerat că reprezintă „o contribuție originală la matematizarea raționamentului logic”. E foarte probabil că această carte să fi pricinuit și chemarea lui Boole ca profesor la Universitatea irlandeză, din orașul Cork, care s-a înființat în 1849. El a acceptat numirea și aici a continuat cercetările legate de modelarea și algebrizarea logicii formale. Astfel, el a stabilit una dintre cele mai surprinzătoare aplicații ale matematicii în domeniul gîndirii pure, anume a pus bazele *logicii simbolice*, numită și *logica matematică*. Lucrarea a apărut în 1854, cu titlul *Un studiu despre legile gîndirii, pe care se bazează teoriile matematice ale logicii și ale probabilităților*. Prin această lucrare, logica formală a căpătat o nouă înfățișare, fiind formalizată pe baza metodelor matematice.

— Și cînd te gîndești că numai cu 60 de ani înainte, vestitul Immanuel Kant scria că de două mii de ani logica formală a lui Aristotel nu a făcut nici un pas înainte și că, după toate aparențele, ea va rămîne o știință complet închisă !

— Dar mai nostim este că cercetările recente din istoria matematicilor au arătat că Boole a avut mai mulți precursori. Așa, de pildă, ideile fundamentale ale logicii simbolice au fost găsite în scrierile lui Aristotel, Descartes, Leibniz ș.a. Cel puțin așa crede Beth. El enumeră vreo opt idei din logica lui Aristotel, care ar fi putut duce la dezvoltarea logicii simbolice. Printre ele ar fi: folosirea literelor ca să se indice variabilele, analogia dintre raționament și calcul (recunoscut numai în parte de Aristotel), concepția unei matematici universale (idee care a fost reluată de Descartes și Leibniz), o

teorie a științelor deductive etc. Totuși, Beth recunoaște că logica simbolică nu s-a putut realiza de greci, căci ei „s-au dovedit incapabili de a crea un simbolism potrivit atât pentru aritmetică și algebră, cât și pentru logică, iar după stabilirea metodei algebrice (către 1600) dezvoltarea matematicii s-a făcut în altă direcție, neprielnică logicii". (7, p. 27 — 28)



Gottfried Wilhelm Leibniz

— în *Discurs asupra metodei*, Descartes arăta că în locul logicii formale ar trebui introdusă o metodologie, care să aibă de model matematica. Am aici un interesant articol al acad. prof. At. Joja (17) din care am să citesc un fragment sugestiv : „El (Descartes) vroia să se constituie o *mathesis universalis* care să fie o știință a măsurii și a ordinii în orice domeniu, ... care ar fi putut fi totodată o logică și o matematică universală, aplicabilă în toate domeniile științei ... Proiectul acestei *mathesis universalis* l-a influențat pe Leibniz, discipolul lui Aristotel și al lui Descartes, care a conceput proiectul unei *scientia mirabilis*. Dar, contrar lui Descartes, Leibniz ... profund atașat de logica aristotelică a fost primul care a înțeles importanța matematizării logicii ... Leibniz dorea să înzestreze logica cu un limbaj mai precis

decît limbajul obișnuit".

— Așa-i, Leibniz a căutat să lege conținutul matematic de relațiile logice dintre noțiuni și propoziții și a preconizat o „caracteristică universală”, ca știință a ecuațiilor logice, analoagă cu aceea a ecuațiilor algebrice. Ea ar fi trebuit scrisă într-o *lingua caracteristica*, în care gîndurile să fie reprezentate prin simboluri, metoda de raționament „transformîndu-se astfel într-un calcul simbolic : *calculus ratiocinator*".

— Leibniz a intenționat, dar George Boole a depășit faza proiectelor și a realizat în mod practic și definitiv acel „calculus ratiocinator” pe care-l numim *logica simbolică*. Iată ce scria Boole la începutul cărții sale : „Obiectul tratatului de față este să studieze legile fundamentale ale acelor operații ale spiritului prin care se împlinește raționamentul și să le exprime în limbajul calculului : apoi să stabilească pe această bază știința logicii și să-i construiască metoda ... în fine, să culeagă din aceste diverse elemente de adevăr, puse în lumină în cursul acestor cercetări, cîteva indicații posibile asupra naturii și a constituției spiritului uman”.

— Din cele ce scrie Boole rezultă că logica simbolică nu se ocupă de alte probleme decît logica tradițională ; deosebirea este că Boole a introdus anumite simboluri care i-au permis să traducă raționamentul în calcul.

— Desigur, dat fiind că gîndirea logică nu înseamnă o analiză de idei sau de fapte. Aceasta-i treaba matematicii • gîndirea logică este numai o anumită combinare de simboluri, adică de idei stabilite după niște legi sau norme operatorii. Am putea spune că atît logica tradițională, cît și cea matematică folosesc simboluri; în prima însă simbolurile sînt de natură fonetică, adică sînt cuvinte, iar în cealaltă, simbolurile sînt de natură ideografică, simbolizînd direct obiectul despre care se vorbește. Din această cauză, simbolurile ideografice, introduse de Boole, trebuie supuse la anumite reguli de operație, fapt care justifică și denumirea de *logică matematică*.

— Adică, vreți să spuneți că în denumirea de *logică matematică*, cuvântul *matematică* se referă *numai la* natura formală în care se prezintă logica și nu la substanța sa ?

— Desigur, odată ce logica nu se ocupă de numere și cantități ! De altfel, în *Analiza matematică a logicii*, Boole arăta aceasta astfel: „Ceea ce face posibilă logica este existența în mintea noastră a noțiunilor generale, abilitatea noastră de a concepe o clasă și de a indica membrii ei individuali cu același nume. Teoria logicii este astfel intim legată de aceea a limbajului”. (18)

— în cea de-a doua carte. *Legile gândirii*, se găsesc legile de calcul ale logicii simbolice. Boole se ocupă în special cu *calculul claselor de elemente*. El notează cu $x, y, z...$ simbolul claselor tuturor x -ilor, al tuturor y -lor etc. care au fost aleși din univers. Această *operație de alegere* a elementelor ce au proprietatea x sau y o aseamuește cu *operația de înmulțire din algebră*. Alegând toți x -ii, apoi toți y -ii care se află în clasa x -ilor, rezultatul acestor două operații succesive de selectare reprezintă elementele ce au ambele calități, x și y . Ele se notează prin produsul xy . Operația s-ar fi putut face și în ordine inversă, adică să se fi aies întâi toți y -ii din univers și apoi din această clasă toți x -ii ; rezultă astfel din nou elementele care posedă ambele proprietăți, y și x , așadar aceleași ca și în primul caz, adică $xy=yx$.

— A apărut o formulă identică cu una din algebră, deși cu alt înțeles care stabilește și comutativitatea !

— Da, dar mai sînt și altele. De pildă *alăturarea* sau *reuniunea* elementelor care aparțin la două clase diferite, x și y , este notată de Boole prin $(x \cup y)$. Aici sînt grupate elementele care posedă „ori proprietatea x , ori proprietatea y , dar nu amîndouă, ca în cazul înmulțirii. Și această operație este comutativă: $(x \cup y) = (y \cup x)$, căci clasa elementelor care sînt x ori y coincide cu aceea a elementelor care sînt ori y , ori x . Operația de alegere (sau înmulțire) este asociativă față de reuniune:

$$z(x+y)=zx+zy.$$

— E clar, căci dacă se aleg din clasa elementelor z pe acelea care au încă fie proprietatea x , fie proprietatea y , rezultatul operației este întocmai cu acela care s-ar fi petrecut dacă din clasa elementelor z s-ar fi ales odată pe acelea care au și proprietatea x și apoi s-ar fi ales elementele care au pe lângă proprietatea z și proprietatea y .

— Cu semnul minus Boole a notat *operația inversă adunării logice*, adică operația de *excludere*. Se obține astfel clasa complementară aceleia considerate. De exemplu, dacă x ar fi clasa plantelor și y a copacilor, $(x-y)$ reprezintă clasa tuturor plantelor cu excepția copacilor. Și în acest caz alegerea este asociativă față de scădere: $z(x-y) = zx - zy$.

— E natural să fie așa, fiindcă în cazul de față, dacă i ar însemna clasa florilor, florile alese dintre plantele deosebite de copaci înseamnă clasa florilor alese din clasa tuturor plantelor din care s-a exclus clasa florilor alese din aceea a copacilor.

— Analogia dintre logică și algebră a fost dusă mai departe de Boole prin introducerea a două *constante logice*, exprimate prin simbolurile 0 și 1, 0 reprezentând clasa fără nici un element, iar 1 clasa tuturor elementelor din Univers. De aici rezultă formulele $1x=x$ și $0x=0$, care cred că nu au nevoie de explicații.

— Ba eu m-aș încumeta să o dau ! Prima formulă spune că dacă din toate elementele din Univers aleg elementele x , obțin clasa x , iar a doua că din clasa vidă nu pot alege nici un x ! Adică rămîne tot clasa vidă.

— Dacă vă plac asemenea jucării, atunci vă rog să le explicați și pe acestea: 1 — x ; sau cît face $x(1-x)$ și $x+(1-x)$?

Prima formulă corespunde clasei complementare elementelor x , adică aceea a tuturor elementelor din care sînt excluse elementele x . Cred că $x(1-x)=0$, fiindcă din clasa elementelor care nu cuprind pe x nu pot alege nici un element x , adică obțin clasa vidă. Formula aceasta însă nu mai

corespunde cu aceea din algebră. A doua formulă : $x + (1 - x) = 1$, căci reuniunea dintre toate elementele x și toate elementele din care sînt excluse elementele x reprezintă toate elementele din Univers, adică 1.

— Îmi pare bine că ați remarcat faptul că formula $x(1 - x) = 0$, proprie algebrei logice, nu mai coincide cu formula corespunzătoare din algebra clasică. Ea nu-i singura. Iată alta, legată tot de operația de alegere $x \cdot x = x^2 = x$.

— În adevăr, ca să aleg din elementele x tot elementele x înseamnă să rămîn la ele.

— Fiindcă aceste nepotriviri ar fi putut surprinde pe unii dintre cititori, Boole le-a semnalat și precizat astfel: „Orice acord care se poate stabili între legile simbolurilor logicii și acelea ale algebrei nu poate rezulta decît dintr-un acord de procedee. Ambele domenii de interpretare rămîn distincte și independente, fiecare este supus la legi și condiții proprii ... simbolurile logicii sînt supuse la o lege specială la care simbolurile cantității, ca atare, nu sînt supuse (de exemplu, în algebra logicii, legea $x^2 = x$ care se poate interpreta între altele ca fiind „clasa a tot ce este comun la o clasă A: și care este ea însăși chiar clasa x ”). (16. p. 472)

— Boole a făcut această observație constrîns fiind și de anumite formule algebrice care nu pot avea nici o interpretare logică. De pildă, ce ar putea însemna $(1 - f \cdot x)$?

— Ținînd seama de faptul că suma este o reuniune de clase ce nu au elemente comune, $(1 - f \cdot x)$ nu poate avea un sens logic decît dacă $x = 0$, căci 1 cuprinde în sine toate elementele existente. La fel, nu are nici un sens logic expresia $(x + x)$, în care nu se poate aplica condiția : „ori...ori”.

— Cred că nu a fost deloc ușor pentru logicienii înclinați să accepte matematizarea raționamentului logic, cînd s-au întîlnit cu asemenea expresii care să nu poată fi interpretate din punct de vedere al calculului logic !

— Nu, dar ele au fost un stimulent pentru noi cercetări. Acestea au contribuit la o mai mare

dezvoltare a logicii simbolice, căci raționamentul simbolic are calitatea de a se putea aplica în orice domeniu în care gândirea pune probleme. În domeniul construcțiilor, chimiei, economiei politice și cîte altele, folosirea simbolurilor logice, a metodelor grafice, care de fapt sînt tot simboluri logice, reprezintă acum instrumentul de lucru cel mai comod și absolut necesar ; cu alte cuvinte logica simbolică s-a integrat în aceste domenii.

— Numai George Boole, deși a fost convins că a realizat o operă durabilă, nu s-a putut bucura de succesul creației lui, fiindcă a murit în 1864, cînd ideile sale nu pătrunseseră încă pe continent și chiar nici în Anglia nu avuseseră încă eco-ul de mai tîrziu după ce ele au fost puse în adevărata lor lumină.

— Știu că ideile lui George Boole au fost răspîndite mai întîi în America de către cunoscutul filosof și logician american C. S. Peirce, fondatorul pragmatismului. În 1867 el a prezentat Academiei Americane de Științe și Arte o dare de seamă asupra operei lui George Boole. Începînd de atunci, Peirce a extins rezultatele obținute de A. De Morgan și G. Boole, considerînd logica relațiilor ca un instrument de seamă pentru analiza logică a matematicii. Tot el este primul care a stabilit principiile fundamentale pentru dezvoltarea logică a matematicii.

— Și peste 15 ani de la moartea lui Boole, adică în 1879, profesorul F. L. Gottlob Frege, de la Universitatea din Halle, a publicat o carte intitulată *Begriffsschrift* adică „Scrierea conceptuală” în care a vrut să traducă în fapt ideea lui Leibniz, fără să știe nimic de cele ce înfăptuise Boole. A urmat exact calea pe care a găsit-o Boole, dar nu a avut o inspirație tot așa de înaripată ca a lui. Simbolurile pe care le-a introdus erau greoaie și încîlcite, așa că metoda propusă de el pentru matematizarea logicii nu a găsit adepți nici chiar în imediata lui vecinătate și nimeni nu a atras atenția asupra ei. Frege însă și-a urmat calea, propunîndu-și să arate că legătura dintre logică și aritmetică este așa de

strînsă îneîț și aritmetica se poate deduce din logică. În 1884 a apărut lucrarea *Bazele aritmeticii*, unde acest program este înfăptuit : noțiunile aritmetice erau deduse din cele logice prin definiții explicite, iar propozițiile aritmeticii derivau din principiile logice, prin deducții logice. Încîntat de realizarea lui, el a scris aceste rînduri : „Logica matematică este capabilă să reprezinte prin cel mai mic număr de convenții toate propozițiile matematice, chiar și acelea mai complicate, care ar fi greu să fie traduse în limbajul obișnuit. Dar ea nu se reduce la o scriere simbolică prescurtată, la un fel de tahigrafie, ea permite să studieze legile acestor semne și transformarea propozițiilor”. (11, p. 381) Dar și cartea aceasta a trecut neobservată, deși Georg Cantor, care era coleg cu el, fiind profesor la aceeași Universitate, a făcut o recenzie a cărții ; nici el nu i-a sesizat importanța, deși Frege a folosit ideile lui Cantor despre mulțimi, cu alte cuvinte făcea parte dintre cei ce-l susțineau.

— Cantor avea o scuză, căci după cum am auzit miercurea trecută tocmai în acel an s-a îmbolnăvit, dar de ce ceilalți matematicieni nu au fost impresionați de această premieră mondială ?

— Se vede treaba că nu au înțeles-o. Fiecare își urmărea problema lui, cum spunea Eminescu : „Trăind în cercul vostru strimt...”

— Te-aș ruga, dragă Nucule, să ne arăți cum a ajuns Frege la această logicizare a aritmeticii, căci, drept să-ți spun, nici eu nu prea știu bine chestia asta.

— Mă cam îndoiesc, stimate profesore, dar vreau să o iau ca bună. Frege a pornit de la noțiunea de bază a aritmeticii, care este numărul întreg și a căutat să-l definească pe cale logică.

— Dar numărul întreg mai are nevoie de definiție ? Dacă m-ar întreba pe mine cineva ce este numărul întreg, l-aș privi năucit și i-aș răspunde : — Cum, ce este : 1, 2, 3..., ce nu știi atîta lucru ?

— Nu sînteți singurul care ar răspunde așa, dragă doctore. Prin această atitudine însă ați trecut în tabăra intuiționiștilor, dar noi vă rugăm să

rămîneți deocamdată aici cu noi, în grupul logiciștilor, ca să putem urmări cele ce ne va destăinui nepotul meu despre investigațiile lui Frege și ale celorlalți partizani ai lui !

— Pornind de la definiția unei noțiuni : „ o formă logică fundamentală care reflectă însușirile caracteristice necesare și generale ale unei clase de obiecte ” el a recunoscut că numărul întreg este *din punct de vedere logic* o noțiune. Așadar, trebuia să pornească *de la noțiunea de clasă de obiecte* și să cerceteze raporturile logice ce se pot stabili între diferitele clase de obiecte atunci cînd ele au ca obiectiv să caracterizeze numărul și numărarea. Ideea originală a lui Frege a fost să arate că este posibil să stabilească faptul că două clase conțin același număr de elemente, sau că o clasă are mai multe elemente decît alta, sau că o clasă nu are nici un element, bazîndu-se numai pe existența corespondenței biunivoce dintre elemente și fără a mai folosi vreo altă noțiune aritmetică.

— Înainte de a te lăsa să ne arăți care a fost raționamentul lui Frege, vreau să menționez observația lui Beth, că, în construcția sa, Frege s-a bazat totuși și pe următoarele trei axiome de comprehensiune, anume :

1. Obiectele care au o proprietate comună constituie o clasă în care acestea sînt elemente și ea este determinată în mod univoc prin această proprietate caracteristică ;

2. O clasă este un obiect și poate, la rîndul ei, să se prezinte ca elementul unei clase ;

3. Două clase care au aceleași elemente sînt identice.

— Nu știu de unde le-ai scos mata, Bădie, căci în cele două cărți ale lui Beth pe care le cunosc eu nu le-am întîlnit. Ele formulează așa de frumos și sugestiv noțiunea destul de vagă de clasă, încît ascultîndu-le mi s-a și înfățișat un exemplu.

— Din cartea scrisă de Beth cu Piaget (4), pe care am găsit-o cînd am fost la Biblioteca Academiei, în București. Și mie mi-au plăcut, de aceea le-am și reținut. Care-i exemplul ce ți-a trecut

prin minte ?



Jean Piaget

— Se aplică bine la axioma a doua. O dreaptă poate fi privită ca o clasă de puncte, a punctelor din care ea este formată. Dar la rîndul ei, dreapta devine un element în clasa tuturor dreptelor care trec printr-un punct dat, sau sînt paralele cu o dreaptă dată.

— Dacă ai dat tu un exemplu, tot legat de axioma a doua, aş da şi eu unul.

— Dacă l-ai clocit tu, dragă Toa, atunci se admite, chiar dacă Nucu face zîmbre.

— Are dreptate băiatul, te pomeneşti că-1 încurcăm şi uită ce avea să ne spună !

— N-ai mata grijă, Bădie, că nu fac zîmbre, fiindcă, la nevoie, te iau pe mata de ajutor. Care-i exemplul despre care vreţi să ne vorbiţi ?

— Exemplul clasei vide. O clasă se poate construi chiar fără să presupunem existenţa vreunui element. Fie deci 0 clasa vidă. Această clasă o poate considera ca element al unei noi clase, aceea a elementelor identice cu clasa vidă. Se obţine o nouă clasă, pe care o notăm $[4>j$. Acum formez clasa care are ca elemente aceste două clase. Se obţine o nouă clasă $[0, \quad]$ şi pot merge aşa mai departe,

construind clase vide ale căror elemente sînt tot clase vide !

— Și Cantor s-a jucat cu mulțimea vidă, dar el a construit o infinitate de mulțimi vide, toate deosebindu-se între ele, dar fiecare avînd numai cîte un singur element ! Anume, el a început cu mulțimea vidă : v și a construit mulțimea care conține pe v ca element unic : (v) , apoi mulțimea care conține pe (v) ca element unic : $((v))$ și așa mai departe ! Aceste mulțimi există ? Nu ? Știi că nu-mi puteți răspunde, de aceea să-l lăsăm pe Nucu, să lege firul ce i l-am rupt noi !

— Așadar, Frege s-a bazat pe ideea că poate ajunge la definiția numărului întreg dacă folosește corespondența biunivocă dintre elementele a două clase, fără să mai aibă nevoie de alte noțiuni aritmetice. Or, noțiunea de corespondență biunivocă între elementele a două mulțimi fusese introdusă de Cantor încă din 1874, cînd a publicat teoria mulțimilor. Frege a găsit aici elementele de care avea nevoie pentru a-și stabili teoria sa, anume :

1) noțiunea de număr cardinal al unei mulțimi (sau al unei clase) ;

2) dacă elementele a două mulțimi (clase) se pot pune în corespondență biunivocă, mulțimile (clasele) au același număr cardinal. El a aplicat noțiunea de număr cardinal al unei clase de elemente și a definit numărul întreg ca fiind clasa a căror elemente sînt clasele ale căror elemente se pot pune în corespondență biunivocă.

— Cu alte cuvinte, numărul *cinci* este clasa tuturor claselor ale căror elemente se pot pune în corespondență cu degetele unei mîini ?

— Da, după cum numărul zero este clasa claselor care l-a zădărit pe profesorul Toader ! Frege a stabilit astfel definițiile logice ale numărului întreg, a lui zero și a succesorului unui număr, fără să folosească nici o noțiune sau axiomă aritmetică. Apoi a demonstrat, tot pe cale logică, teorema care spune că „un număr n are un singur succesor $p=n-|$ și invers, p are ca predecesor unic

pe *n*. De aici a dedus că mulțimea numerelor întregi este nelimitată. De la aceste considerații, Frege a găsit toate teoremele aritmeticii, numai pe bază de raționament, fapt care l-a făcut să creadă că aritmetica se poate reduce la logică, îi mai rămânea să exprime aceste rezultate și în limbajul formalizat al logicii simbolice și s-a hotărât să facă aceasta folosind metoda pe care o găsisese cu cinci ani înainte. Astfel că în 1893 apare primul volum din *Legile fundamentale ale aritmeticii*, care reprezintă *prima încercare de a traduce aritmetica în limbajul logicii simbolice*. S-a creat prin aceasta o tehnică nouă, aceea de a cerceta fundamentele matematicii, pornind de la principiile logicii și, totodată, un curent filosofic nou, cunoscut azi sub numele de *logicism*, care are ca scop să pună în evidență în mod clar nu numai că numerele sînt obiecte logice, dar că toate conceptele matematice pot fi definite prin termeni logici, iar în demonstrarea teoremelor matematice pot fi folosite numai reguli și legi logice de raționament.

— Cînd a apărut cartea lui Frege, oarecare interes pentru logica matematică începuse să se manifeste și în Italia. Din 1891, Giuseppe Peano publica articole despre aceste probleme într-o revistă condusă de el. Opera sa principală, cartea de bază din acest domeniu : *Formularul matematic* avea să apară în mai multe fascicule abia între 1895—1908, scopul fiind definit în prefață de Peano astfel : „Formularul matematic are ca scop să publice propozițiile cunoscute din diferite domenii ale matematicii. Aceste propoziții sînt exprimate în formule cu ajutorul notațiilor din *Logica matematică*, explicate în *Introducerea la formular*”. Această lucrare a fost un adevărat stimulent pentru logicienii de mai târziu prin faptul că simbolurile logice propuse de el erau simple și ușor de mînuit.

— După cîte știu, în volumul I din *Autobiografia* lui Russell, autorul povestește că în 1900, pe cînd era la Paris ca să participe la Congresul internațional de filosofie, s-a întîlnit cu Peano și a discutat cu el despre sistemul de notații pe care l-a

inventat pentru formulizarea logicii. Această discuție a trezit în el imboldul care-i trebuia ca să compună *Principiile matematice*, cartea ce avea să apară în 1903, și să joace un rol important în răspîndirea logicismului.

— De fapt, interesul pentru logica simbolică și dezvoltarea ei mai susținută se datorește Congresului din 1900 de la Paris. În Franța s-au tipărit lucrările lui L. Couturat, J. Cavailles, A. Lautmann, în Anglia a lui B. Russell și prin aceste lucrări au apărut la suprafață atît contribuția lui Boole și Peirce, cît și aceea a lui Frege, la fundarea logicii matematicii, contribuție care pînă atunci rămăsese în umbră.

— Bertrand Russell începuse, de fapt, să se ocupe de probleme de logică matematică, precum și de logicizarea aritmeticii înainte de 1900 și a ajuns și el, independent de Frege, la aceeași definiție logică a numărului pe care a stabilit-o Frege. După întîlnirea cu Peano, el a avut avantajul că a găsit un sistem simbolic mult mai simplu decît acela al lui Frege și atunci cînd, în 1903, a publicat cartea sa *Principiile matematice*, unde a folosit limbajul simbolic inventat de Peano, lucrarea s-a bucurat de un real succes. Prin această carte, matematicienii au aflat și de cartea lui Frege, citată de către Russell.

— Pe Frege nu l-a descurajat faptul că lucrările sale nu au trezit nici un ecou în lumea matematică, să zicem pînă la Congresul de la Paris ?

— Se pare că nu ; el era conștient de valoarea operei sale și de aceea lucra cu multă sîrguință la volumul al doilea din *Legile fundamentale ale aritmeticii*, pe care l-a terminat și l-a dat la tipar în 1903. În acest an a apărut și cartea lui Russell, în care autorul declara : „Faptul că întreaga matematică aparține logicii simbolice este una dintre cele mai mari descoperiri din epoca noastră. Odată acest lucru stabilit, cercetarea principiilor matematicii nu se mai bazează decît pe însăși analiza logicii simbolice”.

— Ce curaj ! Cînd știi cele ce știi, să faci

asemenea afirmație, de bună credință fiind, și să dovedești această bună credință luptînd ani de zile, ca să-ți menții părerea contra faptului ce i se împotriva !

— Faceți opinie separată și asta nu o admit ! Dumneavoastră trei văd că vă înțelegeți perfect, dar cu mine cum rămîne ?

— Rămîne să vă explicăm ce s-a întîmplat și ce se ascunde în dosul acestei declarații solemne. La baza definiției logice a numărului, Russell a descoperit că se ascunde un paradox. Așa fiind, se mai poate afirma, sus și tare, că „întreaga matematică aparține logicii simbolice” ?

— Ce vreți să spuneți cu paradoxul, doar ne-am lămurit perfect asupra definiției numărului întreg, el este clasa tuturor claselor...

— Ei, vedeți că aici e buba ! Dacă se consideră clasa care se conține pe ea însăși ca element, atunci, gata! Apare și paradoxul !

— Iarăși mă încurcați ! Am înțeles foarte bine că o clasă poate să fie la rîndul ei elementul altei clase, dar ca ca însăși să fie elementul propriei sale clase, asta mi se pare cam abracadabrant !

— Dar nu-i deloc așa, stimat doctore. Un singur exemplu vă va lămuri: iată, să privim cărțile acestea de pe masă. Ele formează o clasă. Această clasă este o *noțiune* care are ca sferă mulțimea cărților de pe masă, în cazul nostru 5 cărți. Fiindcă această noțiune de 5 cărți este deosebită de noțiunea de *carte*, spunem că această clasă de obiecte nu se conține pe ea însăși ca element. Să luăm acum alt exemplu : fie clasa noțiunilor matematice. O *noțiune matematică* nu-i ceva concret, așa cum este o carte, ci este *ceva abstract*. În același timp și *clasa noțiunilor matematice* este tot o noțiune abstractă. Atunci ?

— Da, trebuie să recunosc că, în acest caz, clasa noțiunilor matematice face parte, ca *noțiune abstractă*, din clasa noțiunilor matematice, adică ea se conține pe ea însăși ca element. Drept să vă spun, nu mi-am închipuit că matematica poate prezenta chestiuni așa de șugubețe ! Să mai vedem

un exemplu !

— Fie ! Să considerăm clasa tuturor claselor formate din trei elemente. Este această clasă un element al ei ?

— Dar această clasă reprezintă chiar definiția *numărului trei*, or ea cuprinde, prin definiție, mai mult decît trei clase, adică de trei elemente, și deci *nu face parte* din clasa ce se cuprinde pe ea însăși ca element.

— Să luăm acum clasa tuturor claselor ce cuprind fiecare mai mult decît trei elemente.

— în acest caz, lucrurile se schimbă, clasa se cuprinde pe ea însăși ca element !

— Cred că putem ataca acum paradoxul lui Russell, ce a fost descoperit în același timp și de Zermelo. Se consideră *clasa C a tuturor claselor ce nu se conțin ca element*. în care categorie o așezăm, dragă doctore ? Mă adresez dumneavoastră, fiindcă, deși medic, încă nu sînteți uns cu toate alifiile noastre !

— Nu sînt uns cu toate alifiile, dar m-ați uns acum, anunțîndu-mă că-i vorba de un paradox ! Aș zice că face parte din clasa claselor *ce nu se conțin* ca element.

— în acest caz, însăși definiția ei arată că *este un clement* al acestei clase, așadar *face parte* din clasa claselor *ce se conțin ca element* !

— Rămîne cealaltă ipoteză : clasa *C* face parte din clasa claselor *ce se conțin* ca element.

— Dar, în acest caz, ea aparține, tot prin definiție, claselor *ce nu se conțin* ca element !

— în adevăr, sîntem într-un cerc vicios care duce la paradox : dacă admit că *C* face parte din clasa claselor *ce nu se conțin* ca element, rezultă că *C* face parte din clasa claselor *ce se conțin* ca element, și invers !

— După cîte înțeleg, acest paradox duce de rîpă și teoria mulțimilor !

— Ceea ce este mai grav, nu-i paradoxul în sine, ci faptul că pune în discuție principiul logic al terțiului exclus. pe care se bazează posibilitatea de a deduce matematica din logică.

— Adică noțiunea logică a numărului se bazează pe o ipoteză nelogică ? Strașnică hîrtoapă, n-am ce spune ! Și Frege ce-a zis ? Cum și cînd a aflat despre acest dezastru ?

— O spune singur, într-o notă pe care a adăugat-o la sfîrșitul volumului al doilea din *Legile fundamentale...* apărut în 1903 : „Nu-i nimic mai dureros pentru un om de știință decît să vadă prăbușindu-se temelia, exact în clipa cînd opera sa era terminată. Eu m-am găsit în această situație cînd am primit scrisoarea domnului Bertrand Russell chiar atunci cînd această lucrare se afla sub tipar". Odată cu temelia s-a prăbușit și elanul lui Frege, căci spre deosebire de Russell, care a continuat să lucreze și să susțină logicismul, Frege nu a mai publicat nimic în această direcție.

— Foarte interesantă este observația lui Ștefan Korner cu privire la această întîmplare : „Unul dintre cele mai importante și mai fecunde evenimente din istoria logicii matematice și a filosofiei matematicii a fost descoperirea că logica claselor, a lui Cantor, admitînd drept clasă orice colecție, oricum ar fi formată, duce la contradicții. Apariția contradicțiilor face necesară distincția dintre clasele admisibile, adică cele care duc la contradicții interne și cele care nu duc. Regiunea gîndirii unde astfel de distincții sînt imperios necesare este oarecum ca o mlaștină vestită, pe care nimeni n-ar putea-o seca și peste care ar trebui construit un pod, prin orice mijloace artificiale la îndemînă. Calea deducției de la logică la matematică duce prin acest teritoriu. Pentru a putea trece de la una la cealaltă, discipolii lui Leibniz, Frege și Russell, sînt forțați să facă aici supoziții, nu însă „evident logice", cel puțin în sensul „logicului" pe care îl implică folosirea acestui termen de către Leibniz, Frege sau Russell". (13, p. 59).

— Parcă ne-am fi înțeles de mai înainte ca să citești aceste observații ale lui Korner, Bădie, căci vreau să mă opresc asupra atitudinii lui Russell față de paradoxul descoperit. El nu s-a mărginit numai

să-l aducă la cunoștința lui Frege, ci l-a și publicat în cartea lui *Principiile matematicii*, indicînd mai multe metode prin care i se părea lui că-l poate înlătura, fiindcă, după cum am mai spus. el nu s-a gîndit nici o clipă că ar putea renunța la *logicism* ! După părerea lui, pe care de altfel a exprimat-o și Poincare, acest paradox ca și altele ce ar mai fi putut apărea în teoria mulțimilor, avea drept cauză *cercul vicios* care se formează atunci cînd o clasă de elemente conține elemente ce se definesc numai cu ajutorul clasei respective. El a vrut să-l elimine, analizîndu-l după *principiul cercului vicios* pe care l-a formulat astfel: „Tot ce conține o variabilă legată trebuie exclus dintre valorile acestei variabile”. Astfel spus : „ceea ce implică totalitatea unei clase de elemente nu trebuie să aparțină clasei”. La această problemă, ca și la analiza fundamentelor întregii matematici și a teoriei mulțimilor pe cale logică, Russell a lucrat timp de 10 ani împreună cu filosoful A. N. Whitehead, folosind limbajul logicii simbolice introdus de Peano. Rezultatele au apărut, între 1910—1913, în trei volume, cunoscute azi pretutindeni, purtînd ca titlu *Principia Mathematica*.

— Ar fi oare o prea mare pretenție din partea mea, dacă v-aș ruga să-mi arătați cum este scrierea aceea formalizată, ori simbolică, să văd și eu prin ce minune a atras ea pe matematicieni de partea ei ? Departe de mine gîndul de a pretinde să descifrez paginile scrise cu aceste hieroglife pe care le văd în cărțile lui Beth, sau în aceea a lui Dumitriu, sau în ur.ele articole din Comunicările din Zurich, publicate de Gonseth ! Aș dori numai să le cunosc.

— Nu ! Dorința dumneavoastră e bine venită. Vă voi prezenta *principiile unui sistem de logică formalizată*, folo- sindu-mă chiar de cărțile pe care le-ați enumerat. Aceasta reprezintă nivelul inferior de formalizare, numit și *teoria cuantificatorilor*. Țin să vă atrag atenția că de multă vreme, aș spune chiar din timpul matematicii grecești, au fost folosite *simboluri matematice*, stabilite după

anumite reguli bine definite, însă acele simboluri erau amestecate în raționamentul matematic, sau urmate de limbajul obișnuit. Aceasta era o *formalizare necompletă*. Acum este vorba de o *formalizare completă*, adică de o *clasă de propoziții* care sînt scrise prin semne după *anumite reguli convenționale*. Formalizarea se face prin *semne tehnice*, numite *atomii*, *operatori* și *cuantificatori*, care pot fi legate între ele după reguli precise astfel ca să formeze o formulă matematică. Frege mai întîi, apoi Russell și Whitehead au considerat propoziția ca elementul principal al logicii matematice, de aceea și relațiile impuse între semnele folosite poartă numele de *calculul propozițional*, iar teoria lui, *teoria operatorilor propoziționali*. *Atomii* se notează cu litere : p, q, r, \dots și se numesc *variabile de enunț*, fiindcă reprezintă propoziții elementare. De exemplu „ p ” poate însemna „rîde”, „ q ” : „doarme” etc. Atomii $a(x), b(x)$ etc. conțin variabila liberă „ x ” care poate fi o variabilă de predicat sau proprietate. Asemenea expresii reprezintă un enunț care arată o proprietate a unei substanțe individuale sau atribuie un predicat (a) unui individ (x). De exemplu, $a(x)$ poate însemna : Bădia (x) este serios (a), iar $b(x,y)$: Bădia este prietenul (b) domnului Toader (y).

Operatorii sau constantele logice se notează prin semnele următoare, avînd semnificațiile :

— (negație) : pus deasupra unui atom transformă orice propoziție în negația ei. Păstrînd exemplul de mai sus : $a(x)$ se citește : Bădia nu-i serios ! Bineînțeles că se citește numai, dar nu este așa !

A (conjunția: și) se pune între doi atomi. Astfel $a(x) \wedge b(y)$ se citește : Bădia este serios și este prietenul domnului Toader.

V (disjunția : sau) pusă între doi atomi ($p \vee q$) se citește, ținînd seamă de semnificarea dată lui p și q : „rîde sau doarme”. Ea specifică numai adevărul uneia dintre propoziții: sau rîde, sau doarme. Dacă intervine negația, interpretarea se schimbă : $p \vee \neg q$

înseamnă rîde sau nu doarme. Așta, dacă negația se referă numai la un atom, dacă însă se referă la propoziția întreagă ($p \vee q$), sensul este altul.

— înseamnă oare : Nu-i adevărat că rîde sau doarme ?

— Da, *nu-i adevărat* sau *este fals* ! Alt operator este \rightarrow (implicația : *dacă ... atunci*). De pildă $f \rightarrow +q$: dacă nu rîde, atunci doarme.

= (echivalență). Dubla implicație se poate înlocui prin acest simbol de echivalență. Anume $p = q$ înseamnă

$$P \wedge q \wedge q \rightarrow P$$

O grupare care conține atomi și operatori formează o formulă completă. Operatorii au între ei anumite relații evidente în mod intuitiv. De exemplu, formula $P \wedge q = \sim yq$ -
mar*

Pagină
din „Principia Mathematica”

— în adevăr, dacă p implică q atunci *nu* p îl exclude pe q , adică sau nu este p , sau este q .

— Dar propoziția aceasta : $p \wedge q = \sim p \vee q$ > cum o

citiți ?

— Dacă nu există p și q deodată atunci nu există fie p , fie q !

— Iată și câteva propoziții din sistemul de axiome care figurează în *Principia Mathematica* a lui Russell și White-head, pe care aș vrea să mi le interpretați, stimate doctore !

$$\{p \vee p\} \rightarrow p; p \rightarrow (p \vee q); (p \vee q) \rightarrow (q \vee p);$$

— Prima spune că „ p sau p implică p ”, a doua că : p implică p sau q ; a treia că, dacă avem p sau q , atunci avem și q sau p . A patra că dacă p implică q , atunci aceasta implică : r sau p implică r sau q .

— Și atunci, cum rămîne cu afirmația dumneavoastră că n-aveți pretenția să descifrați hieroglifele calculului simbolic ?

— în loc să așteptați răspunsul doctorului nostru, te întreb eu pe tine, dacă ai terminat cu operatorii ?

— Nu, Bădie, mi-au mai rămas cuantificatorii. Căutam să trag și eu chiulul, dar nu mi-a mers. *Cuantificatorii* sînt operatorii care *generalizează* un enunț sau îl *particularizează*. Prin ei se stabilește relația dintre un element și clasa căreia îi aparține. în limbajul obișnuit există mai multe nuanțe prin care se poate semnală că obiectul x aparține unei clase : acest x ; un x ; nici un x ; sau x -i. Elementul x pus între paranteze, sau precedat de semnul V se prezintă ca un cuantificator de generalizare : (x) sau $V.x$ înseamnă : pentru toți x -i, sau oricare ar fi x . Dacă ne referim la semnificația care am dat-o mai înainte atomului a , expresia $(x)a(x)$ se citește : toți oamenii sînt serioși. Lăsînd deoparte particularizarea aceasta și con-siderînd că $a\{x\}$ este o propoziție în care intră elementul arbitrar al unei clase, atunci $(x)a(x)$ înseamnă că toți x -i verifică propoziția $a(x)$. Operatorii care *particularizează* un enunț se notează prin semnele (Ex) , (Ey) ... sau $3.x$, $3.y$, și se citește : există unele

valori ale lui x , sau există unele valori ale lui y etc. Propoziția $(Ex)a(x)$ înseamnă deci : Există cel puțin un om serios sau, în general : există cel puțin un x care verifică propoziția $a(x)$. Spre deosebire de atomii $a(v)$, $b(x, y)$ care conțin *variabilele libere* x sau (x, y) , expresiile de forma $(x)a(x)$ sau $(Ex)b(x, y)$ conțin variabila legată x , iar expresia de forma $(x)(Ey)[6(v, 2)]$ conține *variabilele legate* x și y și *variabila liberă* z . Iată deci și alte moduri de a obține expresii, oricât de complicate, când se aplică alături de operatorii arătați mai înainte și cuantificatorii. Tot printre operatori este inclus și semnul de aserțiune \vdash , imaginat de Frege și adoptat de Russell în cartea sa. De exemplu $\vdash p$ se citește „este adevărat că p rîde”, adică aserțiunea se referă direct la atomul p rîde. În cazul că avem $\vdash p \rightarrow q$ aserțiunea nu se mai referă la atomul p , ci la *implicație*: „este adevărat că p implică q ”. Am să termin aceste indicații, exprimînd simbolic principiul logic cunoscut sub numele de „modus ponens” :

$$\frac{\vdash p \rightarrow q \quad \vdash p}{\vdash q}$$

— Și eu am să-l citesc : „dacă este adevărat că p implică q și p este adevărat, q este adevărat”. E interesantă și atrăgătoare metoda și drept să vă spun că m-ar tenta asemenea exerciții, deși știu bine că celelalte nu pot fi tot așa de simple ca acestea.

— Desigur că nu, dar să știți că vă admir entuziasmul cu care vă adaptați noului. Sînteți mai aproape de Nucu decît de noi și faptul e explicabil nu numai prin diferența de vîrstă față de noi doi, ci și prin meseria dumneavoastră. Ea nu vă permite rutina, căci nici un caz care vi se prezintă la operație nu cred că se aseamănă cu altul, fiecare caz avînd specificul lui.

— Aici ați ghicit, de altfel formula e bine cunoscută : „nu există boală, ci numai bolnavi”.

— Pe noi, căci cred că exprim și părerea prietenului meu, care nu am deprins această scriere din tinerețe, cum e cazul lui Nucu, deși o putem urmări, nu ne atrage. Mă gândesc că așa trebuie să se fi petrecut lucrurile la începutul secolului al XVII-lea, când François Viète a introdus notațiile algebrice simbolice. Matematicienii de atunci scriau cu ușurință toți termenii unei ecuații *cu cuvinte* și le era greu să-i urmărească pe cei tineri care notau pe „x la pătrat” prin x^2 și scriau o ecuație de gradul al treilea sub forma $x^3 + 4-ux^2 + bx - c = 0$, fapt care pentru Tartaglia era inexplicabil. El a stabilit trei formule de rezolvare ale acestei ecuații fiindcă ea trebuia scrisă sub trei forme diferite, astfel ca nici un termen să nu aibă un coeficient negativ. De exemplu: $x^3 - 2x = 3$ și $x^3 = 2x - J - 3$. Pe lângă aceasta, el scria „x la puterea a treia” în loc de x^3 . De altfel, însuși Viète nu a acceptat numerele negative în ecuațiile lui, ci numai Descartes.

— Dar de ce te întorci cu gândul la Viète și Descartes și nu vii mai încoace, dragă Toa ? Crezi că Poincare a înghițit în limbajul simbolic acele notații, din vremea lui, introduse de Peano, Frege și Russell ? Uite ce scria el, la capitolul „Pasigrafie”, în articolul din care am mai citit cândva (5, p. 166) : „Limbajul simbolic creat de dl. Peano joacă un rol foarte mare în aceste noi cercetări. El este susceptibil de a aduce unele servicii, dar îmi pare că dl. Couturat îi dă o importanță exagerată, care ar putea să-l uluiască chiar și pe domnul Peano. Elementul esențial al acestu i limbaj constă din anumite semne algebrice care reprezintă diferite conjuncțiuni : dacă, și, sau, deci. Că aceste semne pot fi comode, este posibil: dar ca ele să fie destinate să reînnoiască întreaga filosofie, e cu totul altceva. E cam greu să admiți că vorba *dacă* câștigă atunci când se scrie \Rightarrow o însușire pe care nu o avea când era scrisă *dacă*. Această invenție a domnului Peano a fost numită la început *pasi- grafie*, adică arta de a scrie un tratat de matematici fără a folosi vreun cuvânt din limbajul

obișnuit. Acest nume îi definea foarte exact limitele. De atunci a fost ridicat la o demnitate mai înaltă, conferindu-i-se titlul de *logistică*. Acest cuvânt se pare că e folosit la Școala de război când trebuie stabilite și cantonate trupele, dar aici nu trebuie să ne temem de nici o confuzie și se vede imediat că acest nume nou implică intenția de a revoluționa logica".

— Ai, matală, Bădie, o slăbiciune pentru Poincare, și gata ! Nu zic că n-am savurat și eu ironia cu logistica, fiindcă a fost plasată admirabil, numai că de data aceasta, din tot fragmentul pe care ni l-ai citit, nu a rămas valabil decât această ironie.

— În adevăr, să legi denumirea de logistică de o treabă administrativă din armată de cantonarea trupelor, cred că a stîrnit hohotele de rîs ale tuturor matematicienilor căci toți știau, tot așa de bine ca și Poincare, că denumirea de *logistică* este de origine greacă și are înțeles de *arta de a calcula*. La greci logistica era aritmetica practică ; ea se deosebea de cea teoretică, azi numită *teoria numerelor*, iar la greci *Aritmetica*.

— Că au rîs și au apreciat gluma nu mă îndoiesc, dar, din păcate, viitorul nu i-a dat dreptate lui Poincare și dacă atunci mulți matematicieni nu au văzut în acele semne nimic altă decât niște prescurtări comode, azi s-a dovedit că ele au reînnoit cu adevărat matematica și filosofia matematicii. Aceasta nu s-a petrecut imediat, dar după cîteva decenii, da. Azi, cele mai multe dintre articolele sau cărțile de algebră și analiză, ca să nu mai amintesc de acelea de logică matematică, nu le poți citi dacă nu cunoști acest limbaj al semnelor. Și nu numai pentru că limbajul semnelor s-a dovedit a fi mai comod, ci pentru că prin el s-au putut exprima propoziții și idei de primă importanță în domeniul fundamentelor matematicii și care nu-și găsesc echivalentul în limbajul comun !

— Aici îți dau și eu dreptate, dragă Nucule. Cred că Poincare a făcut aceste observații ademenit

de plăcerea de a-i zeflemisi pe logiciști, căci dacă s-ar fi gândit măcar o clipă cât de mult datorează aritmetica numai unui singur simbol, *lui zero* și prin el introducerii scrierii poziționale a numerelor, cred că nu ar mai fi scris acele rînduri. Semnele introduse în logica matematică au înlăturat multe ambiguități din limbajul obișnuit.

— Acum, dacă-mi dați voie, am să vă citesc și eu ceva despre logica matematică, dintr-un articol modern intitulat „Exemplul logicii formale”, scris de un mare matematician și om de spirit al nostru, care a dispărut dintre noi prea repede : acad. prof. Grigore C. Moisil. Articolul se află în volumul postum *Știință și umanism* în care elevul său, prof. Solomon Marcus, a adunat o parte din scrierile sale observații publicate prin reviste. (19) „Cînd se vorbește despre procesul de matematizare a științelor umane, nu trebuie uitată acea disciplină umană care, e drept, e considerată de mulți ca foarte inumană : logica. Am auzit, într-o dispută violentă, aruncîndu-se insulta supremă : ești prea logic. Este omul considerat ca prea aspru cînd îți cere să nu faci greșeli de logică? Legile nu pedepsesc greșelile de logică. Societatea le tolerează mai mult decît greșelile de tipar... De vreo sută de ani logica a intrat pe fîgașul matematizării. Progresele ei ca logică matematică au fost mari. S-au creat capitole noi, cum e logica relațiilor ; s-au dezvoltat capitole abia abordate înainte, cum e logica propozițiilor, s-au introdus idei adînci cum e teoria tipurilor ; s-au valorificat nuanțe ; s-au dovedit rezultate tulburătoare...” Mă opresc deocamdată aici ca să-l las pe Nucu să ne spună cîteva cuvinte despre teoria tipurilor logice.

— Teoria tipurilor logice, de diferite ordine, a fost creată de Russell și Whitehead și expusă în primul volum din *Principia Mathematica*, cu intenția de a elimina paradoxul clasei tuturor claselor, prin mijloace pur logice, dat fiind că această problemă privește chiar fundamentele logicii generale, depășind așadar fundamentele

matematicii. După cum am mai spus, Russell a considerat că antinomiile rezultă dintr-un *cerc vicios* și eliminarea lor cere aplicarea **■** *principiului cercului vicios*.

— Pe care l-ai enunțat parcă astfel: „orice conține o variabilă legată trebuie să fie exclus dintre valorile acestei variabile”. Aceasta e clar, dar ce este un *tip logic* ?

— Am să explic folosind cartea lui Beth, unde am găsit o formă mai modernă și mai simplificată a teoriei tipurilor logice. (7. p. 185) Ideea principală este o ierarhizare a variabilelor în *variabile de tip zero* : $x_0, y_0 \dots$ variabile de tip 1 : $A^i, >^i \dots$, variabile de tip k : $x_k, y_k \dots$ etc. Variabilele de tip zero au ca valori chiar elementele-obiecte, cele de tip unu : clasele de obiecte, cele de tip doi : familiile de clase de obiecte, ș.a.m.d. Așadar, la o ierarhizare a variabilelor corespunde și o ierarhie a domeniilor valorilor corespunzătoare. Aceasta înseamnă că fiecare element aparține numai unui anumit tip perfect determinat, care se deosebește de alte tipuri, și, dacă se consideră un element de tip zero, o proprietate a acestui element devine un obiect de tip unu, așadar clasa din care face parte un element devine automat un element de tip superior și deci *nu mai poate face parte din aceeași clasă cu elementul pe care-l cuprinde*. Se vede de aici că această teorie a fost elaborată ca să evite cazul claselor de elemente care ar putea deveni, la rîndul lor, elementele acelor clase. în acest caz, clasele de elemente devin *elemente de tipul al doilea* și, în cazul general, de un *tip superior celui considerat*.

— Așadar, prin această metodă, antinomia lui Russell a fost eliminată și logicismul a fost salvat !

— într-un fel, da, dar e cum spuneți dumneavoastră, doctorii, uneori: operația a reușit, dar pacientul n-a rezistat. Programul logicismului sub forma lui inițială a trebuit părăsit.

— Nu văd de ce ?

— Pentru că logicismul, pretindeau Frege și

Russell, poate deduce întreaga matematică pură numai pe baza principiilor logice, *fără ajutorul* vreunei alte axiome matematice. Dar, pentru ca să stabilească teoria tipurilor, Russell și Whitehead au fost obligați să se bazeze pe trei axiome : axioma reductibilității, axioma infinitului și axioma alegerii, care sînt mai intim legate de domeniul matematic decît de cel logic, prin faptul că nu pot fi considerate ca *identități logice*. Desigur că nu toți logicienii au fost de acord cu teoria tipurilor și de atunci au fost făcute multe încercări, fie pentru a se îmbunătăți teoria tipurilor, ca să se poată evita axiomele care nu sînt de natură logică, fie prin înlocuirea ei cu alte metode de a evita paradoxul cu pricina.

— Mie, drept să vă spun, teoria tipurilor logice îmi pare ca o cîrpeală și încă una cusută cu ață albă ! Căci ce-i alta dacă, admitînd-o, logica trebuie să renunțe tocmai la ceea ce stîrnise interes și curiozitate, prin noutatea ce o afirma ? Însuși Russell a trebuit să recunoască faptul că *matematica nu poate fi dedusă numai din principii logice, că nu este o știință pur deductivă, că nu este un joc gratuit al spiritului*.

— Da, a trebuit să renunțe, fiindcă noțiunea de clasă sau de mulțime nu era așa de simplă cum părea la prima vedere, ci, din contra, ea s-a dovedit chiar destul de complexă și definirea ei mai dă încă multă bătaie de cap.

— De aceea, eu am să iau iarăși cartea lui Poincare ca să-l las pe el să-și dea părerea despre logică. Parcă-l văd cu cîtă satisfacție și-a muia condeiul în călimară și a scris : „Logica nu mai este stearpă, ea naște antinomia”. (5, p. 211) După ce a scris această frază a luat sugativă și a apăsato, mîngîind-o ușor, peste rîndurile ude. Tu, Nucule, nu știi ce înseamnă să scrii cu condeiul, să-1 moi în cerneală și să fii atent ca nu cumva, din cauza unui prea mare impuls interior, să împrști hîrtia cu cerneală. Toate acestea au dispărut de cînd se scrie cu pixul. Dar Poincare nu a știut ce-i pixul, poate că nici stiloul, deși el a fost inventat de Petrache

Poenaru al nostru la jumătatea secolului trecut, îl văd pe Poincare cum a zîmbit pe sub mustață, cum s-a scărpinat în barbă recitind cele scrise și cum a adăugat pentru sine : „Nu-i stearpă, că a născut o odraslă, și încă ce odraslă, are să-i dea ea de furcă, nu glumă!" Și i-a dat !

— Bădie, Bădie, ce ți-a făcut logicismul, matale și profesorului ? V-ați unit amîndoi și vă faceți luntre și punte ca să-l atacați ! Să știți însă că nu aveți dreptate, fiindcă logicismul reprezintă un punct de vedere important și are multe merite în problema cercetării fundamentelor matematicii. Faptul că în ascensiunea lui spre culme i s-a pus în cale hîrtoapa paradoxului pe care l-am discutat, asta era de așteptat, fiindcă matematica nu se poate reduce la logică, dar aceasta nu înseamnă că logicismul trebuie părăsit ! El continuă să aibă mulți adepți, printre matematicienii de frunte care caută să stabilească diferite soluții pentru rezolvarea problemei paradoxului acestuia și ale altora ce s-au mai ivit după el. Sînt de altfel și mulți matematicieni care au căutat să stabilească fundamentele aritmeticii pe alte căi, tot logice. De exemplu, Richard Dedekind consideră că Aritmetica are o origine experimentală, dar că ea exprimă legile fundamentale ale gîndirii. În 1887 a publicat lucrarea sa de bază *Ce sînt și ce reprezintă numerele* ? în care a stabilit o teorie logică a numărului natural și a inducției complete, arătînd că noțiunea de număr întreg natural se poate deduce din noțiunile fundamentale ale teoriei mulțimilor : „Considerînd aritmetica (algebra, analiza) ca o parte a logicii", scria el, „presupun că noțiunea de număr este produsul imediat al legilor gîndirii. Răspunsul meu la întrebarea din titlu : ce sînt și ce reprezintă numerele ? este următorul: numerele sînt creații libere ale spiritului omenesc, ele servesc ca un mijloc pentru a concepe mai ușor și mai precis varietatea lucrurilor... ca puncte principale menționez aici distincția netă dintre finit și infinit, conceptul de număr al lucrurilor, indicația că metoda de demonstrație, cunoscută sub numele

de inducție completă [sau a raționamentului de la n la $(n + 1)$] are o reală forță demonstrativă și că definiția prin inducție (sau re-cursie) este determinată și necontradictorie". (14, p. 263) Ideile sale au fost reluate, peste doi ani, de G. Peano și transformate într-un sistem de cinci axiome pe care le-a exprimat în limbajul simbolic al formalismului logic. Acestea sînt : „1) zero este un număr întreg, 2) zero nu este următorul nici unui număr întreg, 3) următorul unui număr întreg este un număr întreg, 4) două numere întregi sînt egale dacă au același succesor, 5) dacă o teoremă este adevărată pentru numărul 1 și se demonstrează că este adevărată pentru $(n - 1)$, cu condiția ca să fie adevărată pentru n , ea rămîne adevărată pentru toate numerele întregi". Cu ajutorul acestor axiome, Peano a stabilit toate teoremele din aritmetică și a exprimat demonstrațiile ca pe o culegere de formule. Acest fapt a însemnat un mare succes pentru logica simbolică, iar Peano a ținut să accentueze că în acest fel nu au fost stabilite nimic altceva decît analogii de structură între operațiile matematice și acelea ale logicii.

— Adică, vrei să spui că pentru Peano, aritmetica nu se reducea la logică, așa cum pretindeau Frege și Russell ?

— Nu, deși, după cum vedeți, a fost și el un logician ! Și, acestea fiind zise...

— Îmi iau, de data asta, singur permisiunea de a fixa subiectul pentru miercurea viitoare. Fiindcă problema paradoxurilor mi se pare extrem de interesantă și m-a preocupat odată, demult, pe cînd eram student... mai țin minte povestea cretanului mincinos... nu ați vrea să dedicăm o ședință acestei teme ?

— Noi doi am fost „gînd în gînd și inimă-n inimă", dragă doctore. Să vedem ce spune prietenul Teodor, căci dacă vom fi majoritatea, gata !

— Pe mine subiectul acesta m-a interesat întotdeauna, iar Nucu, cînd era elev, nu odată mă trăgea de limbă, doar, doar are să mai afle ceva nou !

— Atunci era simplu de tot, fiindcă eu puneam întrebările și dumneavoastră îmi răspundeți ! Acum de, mă cam tem, dar n-am ce face, după cum a spus Bădia, majoritatea decide !

V

PIATRA DE ÎNCERCARE

— Ultima oară cînd ne-am văzut, ați pomenit, stimate doctore, de paradoxul cretanului mincinos. Știți că forma lui cea mai scurtă este : „eu mint” ?

— Nu, nu am știut și îmi pare rău că nu pot fi de acord că *acest atom, această variabilă de enunț* — ca să mă exprim în limbajul pe care l-am învățat săptămîna trecută — *să fie un paradox* ! Pentru mine, paradoxul trebuie îmbrăcat într-o propoziție mai acătării din care să-mi sară în ochi absurditatea ! Îi cu totul altceva cînd vine la mine un cretan și-mi afirmă că *toți cretanii sînt mincinoși* ! Atunci mă întreb, aproape fără să vreau : — Cum de afirmă el așa ceva ? Doar și el e cretan ! Pe cînd așa, dacă vii și-mi spui ! *eu mint*, te compățimesc sau cel mult ți-aș putea admira sinceritatea !

— Dar după ce criterii stabiliți dumneavoastră absurditatea unei propoziții ?

— Știu eu ? Uneori mă avertizează bunul simț, alteori opinia publică...

— Nu consider că acestea pot fi criterii serioase pentru stabilirea unui paradox ! Se cunosc destule exemple de propoziții ce păreau cîndva absurde și azi sînt considerate ca perfect normale. Eu cred că ar fi mai natural dacă ne-am gîndi la sensul cuvîntului și să deducem din el principiul după care să ne orientăm pentru a-l identifica. *Paradox* înseamnă un enunț vădit contradictoriu, fiindcă *A* și *non-A* sînt afirmate în același timp !

— Grecii numeau o atare propoziție și *antinomie* (contradicție) și *aporie* (nesiguranța, greutate imposibil de rezolvat).

— Ai dreptate, dragă Toa. Am aici și lucrările cunoscutului matematician și filosof francez Albert Lautman, reeditate de curînd la Paris de către admiratori, ca un omagiu adus memoriei lui căci, ca și Galois, el a murit de tînar și n-a avut cînd să-și dezvăluie talentul lui matematic. Aceste rînduri îmi par foarte potrivite acum : „Matematica s-a construit ca și Fizica ; faptele ce trebuiau explicate au fost de-a lungul istoriei paradoxurile pe care progresul gîndirii le-a făcut să fie înțelese, datorită unei reînnoiri constante a sensului noțiunilor esențiale. Numerele iraționale, infinitul mic, funcțiile continue fără derivată, transcendența lui e și π , transfinitul, au fost admise dintr-o necesitate de neînțeles a faptelor mai înainte de a avea o teorie deductivă”. (20)

— Mulțumesc pentru ajutor, Bădie. Știindu-te alături de mine am parcă mai mult curaj să atac pe acest invulnerabil maestru al neurochirurgiei ieșene, acum cînd l-am prins la cotitură și fără bisturiu în mîna ! — Iată, am venit la dumneavoastră, stimate doctore, și vă spun spășit : *eu mint*. Mă credeți ?

— Desigur, doar ești om de cuvînt !

— Bine, dar dacă eu afirm *că mint*, înseamnă că am spus *un adevăr* și nicidecum o minciună. Așadar, mint sau nu mint ? Căci A și non- A sînt adevărate în același timp !

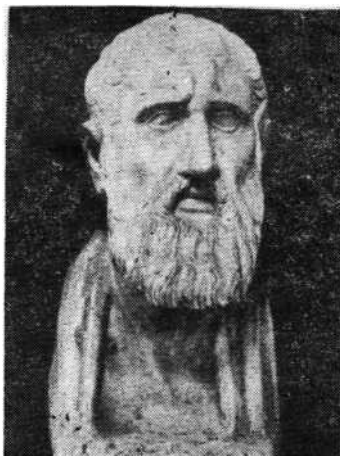
— M-ai bătut, recunosc paradoxul ! Dacă aș fi spus că *nu te cred* și că *minți*, ar fi rezultat că *ai spus adevărat că minți*, adică din nou cele două enunțuri contradictorii A și non- A ar fi fost prezente !

— Sclipitoare minți mai aveau și discipolii școlii din Megara. întemeietorul școlii a fost *Euclid* din Megara, nu cel al nostru, autorul *Elementelor*. Acesta a fost elevul lui Socrate și paradoxul mincinosului se pare că a fost inventat de Eubulides din Milet, de asemenea discipol al Școlii din Megara și probabil contemporan cu Aristotel. își ziceau *eristici*, fiindcă plăcerea lor cea mai mare

era să poată discuta în contradictoriu, și, mai ales, să arunce astfel săgeți Școlii din Atena.

— Grozave săgeți ! Aruncau câte o frază care frământa mințile omenești zeci de veacuri în șir !

— Parcă numai megaricii au atacat Școala din Atena ? Eleații ce cusur aveau ? Paradoxurile lui Zenon, elevul lui Parmenide, nu și-au păstrat și ele prospețimea ? La fel de nerezolvate atunci ca și acum, paradoxul lui Ahile, al săgeții, al dihotomiei sau al stadionului au atacat, atunci, în secolul al V-lea î.e.n. ipoteza despre structura continuă a spațiului, concepția atomistică, noțiunea de mișcare sau aceea de infinit, potențial și actual, punând astfel în evidență caracterul dialectic, contradictoriu, al cunoașterii și existenței.



Zeno

— Nu trebuie să uităm că lansarea paradoxurilor era la modă printre filosofi greci, aceasta fiind o metodă de a se combate între ei. De pildă, se crede că paradoxul cretanului mincinos a fost imaginat ca să atace prin el *noțiunea de adevăr absolut*, susținută în școala lui Platon și în aceea a lui Aristotel.

— Tot din Antichitate este și paradoxul lui Larvatus. Ați auzit de el, dragă profesore. Eu nu l-

am găsit pînă acum în nici o carte.

— Nu, n-am auzit de el. Unde l-ai găsit ?

— Nu l-am găsit eu, ci Bădia. îl citează Beth (21) și e dat sub formă de dialog.

— E tot de origine grecească ?

— Cred că da, căci Beth dă ca sursă pe Lucian.

— Atunci da, trebuie să fie Lucian din Samosata, epicurianul, care a trăit cam prin secolul al II-lea e.n. Și care-i este cuprinsul ?

— Iată-1: „— Cunoști pe tatăl tău ? — Desigur ! — Eu mă îndoiesc. Dacă-ți arăt acum un om mascat și te întreb cine-i acesta, ce ai să-mi răspunzi ? — Că nu-l cunosc. Dar tot așa mi-ai fi răspuns și dacă mascatul ar fi fost tatăl tău ! Or, dacă nu ai putut cunoaște pe acest om mascat, nu l-ai fi cunoscut nici pe tatăl tău !”.

— Interesant paradox. După cîte vād, el combate *postulatul evidenței* despre care vorbea Aristotel.

— Tot în cartea lui Beth am mai găsit un paradox, pe care autorul l-a reconstruit, pornind de la indicațiile găsite în cartea lui Diogene Laerțiu : *Despre viețile și doctrinele filosofilor*, scrisă în prima jumătate a secolului al III-lea e.n. El de asemenea este pus în formă de dialog, și îl citez exact cum îl prezintă Beth : — „Privește ce păr frumos are acest om pe cap. Crezi că dacă i-aș smulge un fir de păr ar arăta mai rău ? — Nu. — Dar dacă i-aș smulge mai multe fire, l-ar urîți ? — Nici într-un caz ! — Atunci pot să-i smulg pe rînd atîtea] fire cîte doresc și omul va păstra frumusețea părului din capul său ?

— Oare acest paradox nu se referă la teoria infinitului potențial, discutată de Aristotel ? El pune în evidență că numai dintr-o mulțime infinită s-ar putea scoate o mulțime finită, fără ca aceasta să se epuizeze.

— S-ar putea să aveți dreptate, stimate doctore, dar Grigore Moisil e de altă părere. În cartea din care v-am citit data trecută, (19, p. 236) el îl leagă

de „imposibilitatea de a da o clasificare corectă... Paradoxul chelului apare aici ca și în alte probleme de definiție a unor concepte... Dacă am spune că un om, ca să nu fie chel, trebuie să aibă 40 000 fire de păr, și-i ajung atâtea, atunci dacă un om ar avea chiar 40 000 fire de păr, deci n-ar fi chel, smulgându- i un singur fir de păr însă, el ar trebui să fie clasificat printre cheli".

— Ca să-i fac o plăcere lui Nucu, dat fiind că el se dă în vînt după silogisme, am să adaug că acest paradox apare ca un *polisilogism*, sau, cum se spune în logică, *un sortit* !



Grigore C. Moisil

— Totuși nici sugestia doctorului nostru cu privire la problema infinitului nu trebuie trecută cu vederea. Ea a preocupat mult pe filosofi greci, și în *Comentariile* lui Proclus asupra lui Euclid se găsește un paradox de toată frumusețea, pe care cred că-i cel mai simplu să vi-l citesc direct după traducerea pe care o am aici, în cartea lui Becker. (14, p. 303) „Așadar, diametrul împarte cercul în două părți egale. Dar, dacă un diametru generează două semicercuri și dacă se duc prin centru o infinitate de diametre (semicercurile) vor deveni ca număr de două ori mai multe decît infinitatea (diametrelor). Acest lucru a fost resimțit de unii ca o aporie la împărțirea infinită a cantității. Noi însă spunem că, desigur, cantitățile se împart la infinit, dar nu într-o infinitate de părți. În primul caz se permite ca părțile infinite de multe să existe în act,

în al doilea caz însă numai în potențialitate; prima dă infinitului existența (substanța), a doua îi dă numai devenire".

— Această problemă a preocupat și pe scolastici în Evul Mediu și, cu multă pasiune, a fost discutată de matematicienii din Renaștere. De exemplu, despre punctele a două cercuri concentrice sau despre acelea de pe latura unui pătrat și de pe diagonala lui se afirma că deși pot fi puse în corespondență, în primul caz prin razele lor, în cel de-al doilea caz prin perpendicularele pe latură, nu sînt la fel de multe în infinit, căci lungimile cercurilor sau a laturii și a diagonalei nu sînt la fel de mari !

— Să nu uităm, Bădie, nici de paradoxul lui Galileu pe care-l discută în „Ziua întâi” din *Discorsi*, unde găsește că există tot atîtea pătrate cîte numere întregi, deși este evident că numărul pătratelor trebuie să fie mai mic !

— Da, dar cea mai importantă culegere de paradoxuri a făcut-o Bernhard Bolzano în cartea pe care a intitulat-o chiar *Paradoxurile infinitului* și a apărut la Praga, în 1851. E de-a dreptul impresionantă stăruința cu care Bolzano vrea să-și convingă contemporanii că în cazul mulțimilor infinite există posibilitatea de a pune în corespondență biunivocă o parte cu întregul. Dar ar pierde tot farmecul dacă nu v-aș citi un fragment în original.

— Se poate, Bădie, l-ai trădat pe Poincare ?

— Deloc, nu te teme că-i vine rîndul și lui ! Acum însă e Bolzano pe listă :

„Înseși exemplele de infinit considerate pînă acum ne-au putut permite să înțelegem că nu toate mulțimile infinite ar trebui tratate la fel din punct de vedere al multiplicității lor și că, dimpotrivă, unele din ele ar fi mai mari (sau mai mici) decît altele, adică una ar include în sine pe alta ca o parte (sau dimpotrivă, ar fi ea însăși o simplă parte a celeilalte). Chiar și această afirmație sună ca un

paradox. Și, desigur, toți care definesc infinitul ca ceva care nu mai este susceptibil de mărire trebuie să găsească ideea că un infinit ar fi mai mare decât alt infinit nu numai paradoxală, ci chiar contradictorie".

— Este extraordinar și de-a dreptul impresionant ! Când a murit Bolzano ?

- în 1848.

— Așadar, nu a mai apucat nimic din minunile lui Cantor ? El nu a putut ști nimic de mulțimile numărabile și nenumărabile, de șirul alefilor, așa cum nu știam nici eu nimic despre ele, cu câteva săptămâni mai înainte !

— Nu, Bolzano nu a putut ști cum se vor dezvolta problemele asupra infinitului, care se poate ghici din această carte cât l-au interesat ; în schimb Cantor a citit cartea lui Bolzano și desigur că a fost inspirat de ea ! De altfel. Cantor vorbește despre această lucrare de mai multe ori. Și chiar acum am să caut câteva rînduri scrise de Cantor ca să vi le citesc. Iată, am și găsit, tot în Becker, la pagina 324 : „Totuși, infinitul propriu-zis, așa cum îl găsim în mod exemplar în mulțimile bine definite... a găsit cel mai hotărît apărător într-un matematician și filosof extrem de subtil din secolul nostru, în Bernhard Bolzano, care a dezvoltat opiniile sale respective mai ales în scrierea frumoasă și bogată în conținut, *Paradoxurile infinitului*, scriere al cărei scop este de a arăta cum contradicțiile căutate în infinite, de scepticii și peripateticii *tuturor timpurilor* nu există deloc, dacă ne dăm numai osteneala, desigur nu totdeauna ușoară, de a înțelege în sine conceptele infinității cu toată seriozitatea potrivit conținutului lor adevărat..." 'Mai departe, (p. 326) spune : „Bolzano este poate singurul la care numerele infinite ajung să aibă o oarecare legitimitate, cel puțin este vorba de mai multe ori despre ele ; totuși, tocmai în felul cum le mînuiește fără să poată prezenta o definiție justă despre ele, eu nu sînt deloc de acord cu el... Pentru înțelegerea reală

a conceptului de numere determinat-infinite, autorului îi lipsește atît *conceptul* general de putere, cît și *conceptul* precis de *număr*".

— Bolzano a fost unul dintre cei mai mari analiști de la începutul secolului al XIX-lea ; el are meritul de a fi introdus rigoarea în demonstrațiile matematice, dar numai Georg Cantor a avut curajul să apuce taurul de coarne, ca să nu-i spun pe nume infinitului actual. El a îndrăznit să-l privească direct în față, introducînd noțiunea de *număr cardinal* sau de *putere* a unei mulțimi infinite. Dar, pentru această îndrăzneală. Cantor și-a primit pedeapsa cuvenită : „Jalnic ard de viu, chinuit ca Nessus".

— Nu-i rea comparația !

— Pentru dumneavoastră s-ar putea, dar eu nu-i înțeleg tîlcul ! Pentru ce uitați că nu sînteți singuri !

— Ce putem face, dragă doctore, dacă avem printre noi un tînar care gîndește-n versuri, mai ales cînd comparația se și potrivește ? Căci știți ce i s-a întîmplat lui Cantor ? A dat peste un paradox, poate cel mai îngrozitor paradox pe care l-ar fi putut întîlni el, cunoscut azi sub numele de *paradoxul celui mai mare număr cardinal*.

— Cum vine asta ? S-a repetat povestea Frege-Russell ? Cînd ? în ce formă ?

— Povestește tu. Nucule, că o știi cel mai bine.

— Paradoxul descoperit de Cantor este următorul : Considerăm mulțimea tuturor mulțimilor ce există în Univers. Această mulțime are un număr cardinal și acest număr cardinal trebuie să fie *cel mai mare număr cardinal posibil*, fiindcă în afara acestor mulțimi nu mai există altele.

— Da, asta e clar, dar unde-i paradoxul ?

— Tocmai că nu-i clar deloc, fiindcă acest număr cardinal nu-i cel mai mare !

— Nu-i cel mai mare ? Dar atunci care-i cel mai mare ?

— Găsiți-1 dumneavoastră ! Amintiți-vă ce

teoremă a stabilit Cantor despre mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi ?

— Fantastic ! Vă spun drept că mi s-a tăiat răsuflarea ! E adevărat că *mulțimea tuturor submulțimilor tuturor mulțimilor din Univers*, are un număr cardinal și mai mare !

— Ei bine. Cantor a descoperit această antinomie în 1895, dar nu a comunicat-o decât lui Dedekind într-o scrisoare și faptul s-a descoperit abia în 1932, când a fost publicată corespondența lui. Am avut așadar dreptul să-l citez pe Eminescu ? Vă închipuiți cât l-a chinuit pe Cantor această descoperire ? în scrisorile lui către Dedekind vorbește despre „multiplicități absolute infinite sau inconsistente”. Iată chiar o frază de-a lui din 1899: „După cum ne convingem ușor, de pildă, *totalitatea a tot ce poate fi gândit* este o astfel de multiplicitate ; mai târziu vom întâlni și alte exemple”! Acum să vedem ce scrie Beth (7, p. 177) despre paradoxul lui Cantor : „noutatea descoperirii nu a întârziat să circule: în iunie 1901 a ajuns și la urechile lui Russell care l-a transformat în alt paradox, de o structură logică mai simplă”.

— Asta-i prea de tot ! Vestitul paradox al lui Russell nu-i stabilit de el ? Miroase a plagiat !

— Nu tocmai. E mai cuminte să-i spunem inspirație ! Dacă Russell nu ar fi avut geniala lui putere de înțelegere și de judecată, putea să audă zeci de paradoxuri și tot de geaba era ! Russell a sesizat imediat că paradoxul se introduce prin noțiunea de mulțime care se conține pe ea însăși ca element și atunci a găsit și paradoxul clasei tuturor claselor, pe care Frege nu l-a observat, și a propus teoria tipurilor ca una dintre soluții. Dar, fiindcă mata, Bădie, ai cartea lui Becker în față, n-ai vrea să ne citești chiar paragraful despre teoria tipurilor, tradus din voi. I din *Principia Mathematica*, mai ales că data trecută n-am mai avut timp să ajungem la el ?

jai simplu. Întâi vorbește de „Principiul „o analiză a paradoxurilor care trebuie S. că toate

provin dintr-un cerc vicios de un Avoreşelile de acest gen iau naştere din supoziţia c[^]^ie de obiecte poate conţine elemente care pot e^{'ix} numai cu ajutorul colecţiei ca întreg... Principiul -ală putinţa de a evita totalităţile nelegitime poate ulat astfel: Ceea ce implică totalitatea unei colecţii Juie să aparţină colecţiei. Vom numi aceasta „principiul

cercului vicios", deoarece el ne dă putinţa de a evita greşelile de tipul cercului vicios implicate în supoziţia totalităţilor nelegitime... Astfel, atît prin principiul cercului vicios, cît şi prin intuiţie directă ajungem la concluzia că funcţiile pentru care un obiect dat *a* poate fi argument nu sînt capabile să fie argumente la rîndul lor pentru aceasta şi că ele nu au nici un termen comun cu funcţiile pentru care ele pot fi argumente. Astfel sîntem conduşi să construim o ierarhie... Pentru a rezolva contradicţia privitoare la clasa claselor care nu sînt elementele lor însele, vom presupune că o propoziţie despre o clasă trebuie să se reducă totdeauna la o afirmaţie asupra unei funcţii logice care defineşte clasa, adică asupra unei funcţii care este satisfăcută de elementele clasei, şi nu de alte argumente. Astfel, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcţie logică şi presupune o funcţie... De aceea o clasă nu poate fi niciodată argument al funcţiei care o defineşte... Astfel, dacă *x* este o clasă, propoziţia „*x* este un element al lui *x*” este fără sens şi de aceea expresia „clasa tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor însele” nu are nici un sens". (14, p. 356)

— Spune că *nu are nici un sens*, dar de aici şi pînă la înlăturarea paradoxurilor e cale lungă. De altfel, matematicienii nu s-au speriat aşa de tare de ele ca să le evite, ci, din contra, se simţeau aşa de bine în tovărăşia lor încît au căutat să-şi mai inventeze altele noi ! însuşi Russell- a mai fabricat unul: *paradoxul bărbierului* !

— Dar ce are bărbieritul cu logistica ?

— Are, de ce să n-aibă ? Judecaţi şi dumneavoastră singur : într-un sat nu exista nici un

om cu barbă. Unii se râdeau singuri, iar pe alții îi râdea bărbierul, care era și el din sat. Bărbierul avea deci o funcție precisă : să radă pe cei ce nu se râdeau singuri. Dar pe v<- bărbierea ?

— E bună! La bărbier se duc numai cei ce *nu se* . singuri, iar cei ce se bărbieresc singuri, nu recurg la't //

Dacă bărbierul nu-i spin sau femeie, atunci antinom

Russell e cu adevărat foarte amuzantă.

— Nu fiți așa de darnic cu aprecierile, stimat docto^B casă nu le epuizați prea devreme. De pildă, cum veți considera următoarea antinomie, formulată de un alt matematician despre care vom vorbi mult mai târziu, pe nume L. E. J. Brouwer : Locuitorii unei insule suprapopulate au hotărît să nu mai permită nimănui să se stabilească acolo. De aceea au difuzat un avertisment : cine va nesocoti hotărîrca și va veni în insulă va fi judecat și omorît, anume : dacă va spune un adevăr va fi împușcat și dacă va spune o minciună, va fi spînzurat. Totuși, un tînăr .a apărut în insulă și dus la judecată a spus : „voi fi spînzurat”. Iar judecătorii, după lungi și îndelungate discuții, l-au lăsat să locuiască în insulă.

— Antinomia aceasta e tot așa de sclipitoare ca și figura tînărului rămas în insulă ! Dacă l-ar fi spînzurat, atunci el a spus un adevăr și deci ar fi trebuit împușcat, dacă l-ar fi împușcat atunci ar fi spus o minciună și trebuia spînzurat, și-au spus judecătorii, aflînd și ei cu această ocazie ce-i acela un paradox ! Mai sînt și altele prin sacul dumneavoastră cu surprize ?

— Să mai căutăm ! Ce-ai zice. Nucule, de varianta lui Beth după antinomia lui Larvatus ?

— Adică despre antinomia *semnificării* sau a *denotației* ? Strașnică, numai că cere oleacă de discuție. Am să o încerc ! Problema se pune astfel: orice elev care a învățat despre logaritmi știe că $\log 343 > 2$, iar $343 = 7^3$; putem scrie deci $\log 7^3 > 2$. Să repetăm acest raționament și, prin analogie, să

spunem: numărul 343 are 3 cifre, dar $343=7^7$ deci 7^7 are 3 cifre !

— Dar 7^7 are numai două cifre ! Așadar analogia a dus la un rezultat paradoxal.

— Da, ați intuit exact lucrurile. Matematicianul și logicianul A. Tarski a arătat că această pretinsă analogie dintre cele două raționamente nu-i admisibilă deoarece, în timp ce primul raționament se aplică la valoarea funcției $\log x$ pentru valoarea $x = 343$ a argumentului, în cel de-al doilea raționament nu mai intervine valoarea vreunei funcții care ar putea stabili analogia, ci o proprietate a argumentului și asta nu are nici o legătură cu raționamentul considerat. Problema aceasta se cunoaște în logica matematică sub denumirea de *logica funcțiilor de adevăr*. De pildă, un număr ca : $\log 343$ este privit ca un *obiect logic* și el este un *simbol complet*, fiindcă *denotă* un obiect determinat. Din contra : $\log x$ este un *simbol incomplet*, fiindcă el conține o variabilă liberă x . Orice simbol incomplet reprezintă o funcție $y=f\{x\}$ sau $z=f(x, y)$, în cazul că z depinde de două variabile libere x și y . Același lucru se poate spune și despre o propoziție sau o frază $A(x)$: și ea este un simbol care are structura unui enunț ce conține o variabilă liberă, ea este o *funcție logică* sau o *funcție propozițională* de variabila x , după cum $B(x, y, z)$ este o funcție propozițională de 3 variabile independente x, y, z etc. Dacă se dă variabilei o anumită valoare, care exprimă o propoziție, simbolul ia o formă determinată care poate avea două valori, aceea de *adevăr* sau de *fals*. În cazul unei funcții propoziționale de două argumente independente, argumente care reprezintă propoziții, valoarea de adevăr a funcției depinde numai de valorile de adevăr ale variabilelor și nu de conținutul lor. De obicei se notează cu A adevărul și cu F falsul, iar Frege a extins distincția dintre *conotație* și *denotație* sau dintre *sens* și *semnificație* de la noțiuni la propoziții. În felul acesta, o propoziție compusă este o funcție de

adevăr, dacă adevărul sau falsitatea ei depinde de adevărul sau falsitatea argumentelor ei. Fiindcă într-o funcție de adevăr valorile argumentelor sînt sau adevărul sau falsul, putem scrie că valoarea funcției însăși este A (adevărul) sau F (falsul). Să luăm un exemplu : /ie argumentele x și y legate prin conjuncția „și”, adică $f(x, y) = x/y$. Valorile de adevăr sau fals ale acestei funcții le putem înscrie în următoarea matrice :

x	y	$f(x, y)=x/y$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

De aici se vede că valoarea de adevăr a conjuncției (\wedge) apare dacă și numai daci cele două propoziții au amîndouă valoarea de adevăr ; aljtfel ea are valoarea F , adică este falsă. Cred că un exemplu practic ne-ar lămuri încă mai bine. Propoziția : *Cantor a creat teoria mulțimilor* are cu totul alt *sens* decît : *miercuri este ziua în care stăm de vorbă*. Ele au însă aceeași *semnificație*, aceea de adevăr. Dacă formez fraza : *Cantor a creat teoria mulțimilor și miercuri este ziua în care stăm de vorbă*, această frază este o *funcție de adevăr* și *denotează* valoarea de adevăr A . Dar fraza : *Bădia a creat teoria mulțimilor și miercurea stăm de vorbă*, este o funcție de adevăr care *denotează* valoarea de adevăr F .

— Pînă nu te legi de mine, nu-ți tihnește ! Ca pedeapsă, șterge-o și fă-ne cafeaua !

— Parcă eu așteptam altceva ? Pînă atunci, descurcă-te mata, că ai un cerber bun în profesorul meu !

— Ce înseamnă să ne descurcăm ? Ce, propozițiile sînt ca niște bomboane, fiecare învelită în staniol alb dacă-s adevărate și roșu dacă-s false ? în acest caz desigur că este simplu să faci tabele și să stabilești valoarea de adevăr a funcțiilor pentru fiecare operator în parte. Dar nu orice propoziție se

poate socoti ca adevărată sau falsă și deci nici fiecare frază nu poate fi considerată ca o funcție de adevăr. Când spun: mâine are să fie vreme frumoasă, cine-mi garantează adevărul sau falsitatea acestei afirmații ? Cîte nu îndură, pe tema asta, bieții meteorologi cînd anunță timpul probabil !

— De fapt de această problemă s-au ocupat intens logicienii, mai întîi Boole, apoi Frege, și după aceea Russell, Cantor, Zermelo ș.a. Toți și-au propus să stabilească sistematic logica claselor, ca pe un sistem deductiv. Și așa s-a descoperit, întîi de Cantor, apoi de Russell și Zermelo, că pe această cale se poate ajunge la contradicții.

— Pe mine mă tot rîcîie un lucru. S-a afirmat aici că Russell și-a formulat paradoxul, după ce a aflat de paradoxul lui Cantor. Dar tot de aici am aflat că Zermelo a stabilit același paradox, independent de Russell. Atunci cum rămîne cu inspirația de origine cantoriană ?

— Despre acestea povestește Constance Reid în cartea pe care a scris-o despre David Hilbert. (22) Zermelo, elevul lui Hilbert, se ocupa de mai multă vreme cu teoria lui

— Nimic mai simplu. Întîi vorbește de „Principiul cercului vicios” : „o analiză a paradoxurilor care trebuie evitate arată că toate provin dintr-un cerc vicios de un anumit fel. Greșelile de acest gen iau naștere din supoziția că o colecție de obiecte poate conține elemente care pot fi definite numai cu ajutorul colecției ca întreg... Principiul care ne dă puțința de a evita totalitățile nelegitime poate fi formulat astfel: Ceea ce implică totalitatea unei colecții nu trebuie să aparțină colecției. Vom numi aceasta „principiul cercului vicios”, deoarece el ne dă puțința de a evita greșelile de tipul cercului vicios implicate în supoziția totalităților nelegitime... Astfel, atît prin principiul cercului vicios, cît și prin intuiție directă ajungem la concluzia că funcțiile pentru care un obiect dat *a* poate fi argument nu sînt capabile să

fie argumente la rîndul lor pentru aceasta și că ele nu au nici un termen comun cu funcțiile pentru care ele pot fi argumente. Astfel sîntem conduși să construim o ierarhie... Pentru a rezolva contradicția privitoare la clasa claselor care nu sînt elementele lor însele, vom presupune că o propoziție despre o clasă trebuie să se reducă totdeauna la o afirmație asupra unei funcții logice care definește clasa, adică asupra unei funcții care este satisfăcută de elementele clasei, și nu de alte argumente. Astfel, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcție logică și presupune o funcție... De aceea o clasă nu poate fi niciodată argument al funcției care o definește... Astfel, dacă x este o clasă, propoziția „ x este un element al lui x ” este fără sens și de aceea expresia „clasa tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor însele” nu are nici un sens”. (14, p. 356)

— Spune că *nu are nici un sens*, dar de aici și pînă la înlăturarea paradoxurilor e cale lungă. De altfel, matematicienii nu s-au speriat așa de tare de ele ca să le evite, ci, din contra, se simțeau așa de bine în tovărășia lor încît au căutat să-și mai inventeze altele noi ! însuși Russell a mai fabricat unul: *paradoxul bărbierului* !

— Dar ce are bărbieritul cu logistica ?

— Are, de ce să n-aibă ? Judecați și dumneavoastră singur : într-un sat nu exista nici un om cu barbă. Unii se rădeau singuri, iar pe alții îi rădea bărbierul, care era și el din sat. Bărbierul avea deci o funcție precisă : să radă pe cei ce nu se rădeau singuri. Dar pe bărbier cine îl bărbierea ?

— E bună ! La bărbier se duc numai cei ce *nu se bărbieresc* singuri, iar cei ce se bărbieresc singuri, nu recurg la bărbier ! Dacă bărbierul nu-i spîm sau femeie, atunci antinomia lui Russell e cu adevărat foarte amuzantă.

— Nu fiți așa de darnic cu aprecierile, stimate doctore, casă nule epuizați prea devreme. De pildă, cum veți considera următoarea antinomie, formulată de un alt matematician despre care vom

vorbi mult mai târziu, pe nume L. E. J. Brouwer : Locuitorii unei insule suprapopulate au hotărât să nu mai permită nimănui să se stabilească acolo. De aceea au difuzat un avertisment : cine va nesocoti hotărîrea și va veni în insulă va fi judecat și omorât, anume : dacă va spune un adevăr va fi împușcat și dacă va spune o minciună, va fi spînzurat. Totuși, un tînăr a apărut în insulă și dus la judecată a spus : „voi fi spînzurat”. Iar judecătorii, după lungi și îndelungate discuții, l-au lăsat să locuiască în insulă.

— Antinomia aceasta e tot așa de sclipitoare ca și figura tînărului rămas în insulă ! Dacă l-ar fi spînzurat, atunci el a spus un adevăr și deci ar fi trebuit împușcat, dacă l-ar fi împușcat atunci ar fi spus o minciună și trebuia spînzurat, și-au spus judecătorii, aflînd și ei cu această ocazie ce-i acela un paradox ! Mai sînt și altele prin sacul dumneavoastră cu surprize ?

— Să mai căutăm ! Ce-ai zice. Nucule, de varianta lui Beth după antinomia lui Larvatus ?

— Adică despre antinomia *semnificării* sau a *denotației* ? Strașnică, numai că cere oleacă de discuție. Am să o încerc ! Problema se pune astfel: orice elev care a învățat despre logaritmi știe că $\log 343 > 2$, iar $343 = 7^3$; putem scrie deci $\log 7^3 > 2$. Să repetăm acest raționament și, prin analogie, să spunem: numărul 343 are 3 cifre, dar $343 = 7^3$ deci 7^3 are 3 cifre !

— Dar 7^3 are numai două cifre ! Așadar analogia a dus la un rezultat paradoxal.

— Da, ați intuit exact lucrurile. Matematicianul și logicianul A. Tarski a arătat că această pretinsă analogie dintre cele două raționamente nu-i admisibilă deoarece, în timp ce primul raționament se aplică la valoarea funcției $\log x$ pentru valoarea $x = 343$ a argumentului, în cel de-al doilea raționament nu mai intervine valoarea vreunei funcții care ar putea stabili analogia, ci o proprietate a argumentului și asta nu are nici o legătură cu raționamentul considerat. Problema

aceasta se cunoaște în logica matematică sub denumirea de *logica funcțiilor de adevăr*. De pildă, *un număr* ca : $\log 343$ este privit ca un *obiect logic* și el este un *simbol complet*, fiindcă *denotă* un obiect determinat. Din contra : $\log x$ este un *simbol incomplet*, fiindcă el conține o variabilă liberă x . Orice simbol incomplet reprezintă o funcție $y=f(x)$ sau $z=f(x, y)$, în cazul că z depinde de două variabile libere x și y . Același lucru se poate spune și despre o propoziție sau o frază $A(x)$: și ea este un simbol care are structura unui enunț ce conține o variabilă liberă, ea este o *funcție logică* sau o *funcție propozițională* de variabila x , după cum $B(x, y, z)$ este o funcție propozițională de 3 variabile independente T, y, z etc. Dacă se dă variabilei o anumită valoare, care exprimă o propoziție, simbolul ia o formă determinată care poate avea două valori, aceea de *adevăr* sau de *fals*. în cazul unei funcții propoziționale de două argumente independente, argumente care reprezintă propoziții, valoarea de adevăr a funcției depinde numai de valorile de adevăr ale variabilelor și nu de conținutul lor. De obicei se notează cu A adevărul și cu F falsul, iar Frege a extins distincția dintre *conotație* și *denotație* sau dintre *sens* și *semnificație* de la noțiuni la propoziții. în felul acesta, o propoziție compusă este o funcție de adevăr, dacă adevărul sau falsitatea ei depinde de adevărul sau falsitatea argumentelor ei. Fiindcă într-o funcție de adevăr valorile argumentelor sînt sau adevărul sau falsul, putem scrie că valoarea funcției însăși este A (adevărul) sau F (falsul). Să luăm un exemplu : /ie argumentele x și y legate prin conjuncția „și”, adică $f(x, y) = x \wedge y$. Valorile de adevăr sau fals ale acestei funcții le putem înscrie în următoarea matrice :

x	y	$f(x, y) = x \wedge y$
A	A	A
A	F	F
F	A	F

$$F \quad |F \quad | \quad F$$

De aici se vede că valoarea de adevăr a conjuncției apare dacă și numai dacă cele două propoziții au amîndouă valoarea de adevăr ; altfel ea are valoarea F , adică este falsă. Cred că un exemplu practic ne-ar lămuri încă mai bine. Propoziția : *Cantor a creat teoria mulțimilor* are cu totul alt *sens* decît : *miercuri este ziua în care stăm de vorbă*. Ele au însă aceeași *semnificație*, aceea de adevăr. Dacă formez fraza : *Cantor a creat teoria mulțimilor și miercuri este ziua în care stăm de vorbă*, această frază este o *funcție de adevăr* și *denotează* valoarea de adevăr A . Dar fraza : *Bădia a creat teoria mulțimilor și miercurea stăm de vorbă*, este o funcție de adevăr care denotează valoarea de adevăr F .

— Pînă nu te legi de mine, nu-ți tihnește ! Ca pedeapsă, șterge-o și fă-ne cafeaua !

— Parcă eu așteptam altceva ? Pînă atunci, descurcă-te mata, că ai un cerber bun în profesorul meu !

— Ce înseamnă să ne descurcăm ? Ce, propozițiile sînt ca niște bomboane, fiecare învelită în staniol alb dacă-s adevărate și roșu dacă-s false ? în acest caz desigur că este simplu să faci tabele și să stabilești valoarea de adevăr a funcțiilor pentru fiecare operator în parte. Dar nu orice propoziție se poate socoti ca adevărată sau falsă și deci nici fiecare frază nu poate fi considerată ca o funcție de adevăr. Cînd spun: *mîine are să fie vreme frumoasă*, cine-mi garantează adevărul sau falsitatea acestei afirmații ? Cîte nu îndură, pe tema asta, bieții meteorologi cînd anunță timpul probabil !

— De fapt de această problemă s-au ocupat intens logicienii, mai întîi Boole, apoi Frege, și după aceea Russell, Cantor, Zermelo ș.a. Toți și-au propus să stabilească sistematic logica claselor, ca pe un sistem deductiv. Și așa s-a descoperit, întîi de Cantor, apoi de Russell și Zermelo, că pe această cale se poate ajunge la contradicții.

— Pe mine mă tot rîcîie un lucru. S-a afirmat aici că Russell și-a formulat paradoxul, după ce a aflat de paradoxul lui Cantor. Dar tot de aici am aflat că Zermelo a stabilit același paradox, independent de Russell. Atunci cum rămîne cu inspirația de origine cantoriană ?

— Despre acestea povestește Constance Reid în cartea pe care a scris-o despre David Hilbert. (22) Zermelo, elevul lui Hilbert, se ocupa de mai multă vreme cu teoria lui Cantor și astfel, odată i-a comunicat antinomia pe care a găsit-o el și care era aceea pe care Russell i-a transmis-o lui Frege. În 1904, Zermelo a demonstrat și teorema că în orice mulțime m se poate stabili o bună ordonare.

— Cunosce teorema: înseamnă că există o relație $<$ astfel ca $(w, <)$ să fie bine ordonată.

— Însă atunci cînd am discutat despre ea nu am insistat, și o fac acum, că demonstrația acestei teoreme se bazează pe *axioma alegerii*, axioma care a avut mai mulți precursori înainte de a fi fost formulată de Zermelo, printre ei și Peano, care a stabilit-o în 1890, apoi Beppo Levi care a formulat-o în 1902.

— Axioma alegerii ? Interesantă denumire. Ce vrea să însemne ?

— Denumirea aceasta i-a fost dată de Zermelo și ea se referă la o observație pe care a făcut-o el, urmărind demonstrația lui Cantor ca să stabilească faptul că alef zero este cel mai mic număr cardinal transfinit, precum și teorema că toate numerele cardinale transfinite se află în seria alefurilor. Zermelo a arătat atunci că nu numai în aceste două teoreme, dar și în multe alte teoreme din analiză se face, în mod tacit, o presupunere ce nu se poate deriva din nici un principiu logic. Anume, se presupune că „fiind dată o mulțime M de mulțimi nevide, astfel ca să nu aibă între ele nici un element comun, există o mulțime care cuprinde cîte un singur element din fiecare mulțime care aparține lui M . Această axiomă Zermelo a numit-o *axioma alegerii*. Ea este evidentă atunci cînd

mulțimea mulțimilor M este finită, căci atunci se poate forma o mulțime în care se află câte un element din fiecare mulțime din M , printr-un număr finit de operații de alegere. Chiar și în cazul unei mulțimi infinite, se poate forma mulțimea despre care este vorba, dacă există o regulă care permite să se deosebească un element dintre celelalte elemente, aparținând fiecărei mulțimi în parte. Dar dacă o atare regulă nu există, atunci alegerea nu se poate face fiindcă operația necesară nu se sfârșește niciodată.

— E foarte ingenios și totodată pitoresc — după expresia lui Poincaré — exemplul propus de Russell ca să illustreze această axiomă. Iată-1: Presupunem că se dă o mulțime infinită de perechi de ghetе, adică o mulțime infinită de mulțimi, fiecare avînd cîte două elemente. Deoarece gheata de pe piciorul drept se deosebește de cea de pe piciorul sting, alegerea se poate face și se obține o mulțime care cuprinde toate ghetetele de pe piciorul drept, sau sting. Dar dacă în loc de ghetе s-ar da o mulțime infinită de perechi de ciorapi, atunci metoda nu se mai poate aplica deoarece ciorapii nu se deosebesc de la un picior la altul.

— Această axiomă a fost și este mult discutată. Mulți matematicieni consideră că nici nu înțeleg ce vrea să spună această axiomă, deoarece cuvintele *mulțime* și *există* nu sînt precis definite ! Alții, din contra, au generalizat această axiomă sau au găsit propoziții echivalente axiomei alegerii. Astfel A. Tarski a stabilit, în 1924, următoarele teoreme care sînt echivalente cu axioma alegerii.

1) Oricare ar fi numărul cardinal transfinit m , al unei mulțimi date, există egalitatea $m^2 = m$.

2) Dacă m , n , p , q sînt numere cardinale transfinite oarecare, așa fel că $m < n$ și $p < q$ atunci avem $m \cdot p < n \cdot q$.

De altfel, din axioma alegerii s-au stabilit multe consecințe și nici una dintre ele nu a dus la vreo contradicere. (9, p. 127)

— V-ați luat dumneavoastră cu vorba, ca să se

adeverească proverbul cu pisica aceea care pleacă de-acasă și șoarecii joacă pe masă ! Cu totul în altă direcție intenționam eu să îndreptăm discuția.

— Poftim, și așa ne-am băut cafeaua, care a fost perfectă și-ți mulțumim pentru ea. Spune-ne ce te frământă ?

— Înainte de a continua discuția noastră aş fi vrut să tragem o concluzie asupra a trei dintre paradoxurile pe care le-am discutat astăzi, acela al cretanului, al bărbierului și al insularului. La prima vedere ele par diferite unul de altul și totuși le putem considera ca variante pe aceeași temă ale unei funcții de adevăr. Or, adevărul și falsul ne dau referințe numai asupra limbajului și a gândirii, dar nu și relații asupra semnelor logice cuprinse în aceste propoziții. De aceea, aceste trei paradoxuri nu aparțin logicii propriu-zise și nici matematicii, ci *semanticii*. Semantica (în grecește *sema* înseamnă *semn*) este un capitol din logica simbolică și se ocupă cu interpretarea unui sistem formalizat prin alt sistem formalizat, cu problema adevărului în limbajele formalizate etc. Așa că aceste trei antinomii nu ne interesează din punct de vedere logic sau matematic. Din contra, antinomia lui Russell cu privire la mulțimea tuturor mulțimilor se referă la o noțiune fundamentală din logică : aceea de mulțime sau clasă ; antinomia lui Cantor se referă la altă noțiune fundamentală din matematică : aceea de număr cardinal transfinit ; antinomia lui Beth, a denotației : la noțiunea de semnificare a unei expresii matematice ! Și acum, după ce am mai descurcat firele antinomiilor prezentate, aş vrea să vă mai vorbesc încă și de altele, care ridică alte probleme. De pildă, despre paradoxul lui Burali-Forti, cunoscut și sub numele de paradoxul celui mai mare număr ordinal.

— Era de așteptat să existe și un paradox al celui mai mare număr ordinal, odată ce există unul al celui mai mare număr cardinal ! Mă mir că a fost descoperit de altcineva și nu tot de Cantor !

— Aveți dreptate să vă mirați, dragă doctore, și

cred că vă veți mai mira odată cînd am să vă spun că el a fost descoperit tot de Cantor, odată cu paradoxul celui mai mare număr cardinal, dar nu a fost cunoscut decît după ce Burali-Forti l-a publicat în 1897. Cantor îl cunoștea din 1895 și se pare că i l-a prezentat, în 1896, într-o scrisoare lui Hilbert, dar atunci nu s-a știut nimic despre aceasta și astfel el poartă numele celui ce l-a adus la cunoștința publică. Iată paradoxul : După cum știți, orice mulțime bine ordonată are un număr ordinal. Dacă ne referim la șirul numerelor ordinale, luate pînă la un număr ordinal dat, numărul lui ordinal depășește cu 1 numărul ordinal la care ne-am oprit. Dacă ne gîndim la șirul tuturor numerelor ordinale existente în Univers, acest șir posedă un număr ordinal T , care este cel mai mare număr ordinal posibil. Însă dacă la șirul tuturor numerelor ordinale îl includem și pe T , acest șir are ca număr ordinal $T + 1$, deci mai mare decît T și prin urmare T nu este cel mai mare număr ordinal !

— După observația care ai făcut-o mai înainte, aș putea spune că paradoxul lui Burali-Forti se teferă la *noțiunea matematică de număr ordinal*.

— În adevăr, și drept răsplată am să vă mai spun două, al lui Richard și al lui Berry, pe care le citează și Poincare, așa că sînt sigur că Bădia nu va putea rezista ispitei de a deschide *Science et Methode*.

— Cred și eu ! Adică de ce să nu le citesc chiar de acolo ? Iată articolul și paradoxul lui Richard, aici la pagina 202. Te scutesc astfel să-ți mai cauți cuvintele. „Să considerăm”, spune Poincare, „toate numerele zecimale ce se pot defini cu ajutorul unui număr finit de cuvinte ; aceste numere zecimale formează o mulțime E , și e ușor de văzut că această mulțime este numărabilă, adică diferitele numere zecimale din mulțimea E pot fi numerotate de la 1 la infinit. Să presupunem numerotarea efectuată și să definim un număr N astfel: Dacă a n -a zecimală a numărului n din mulțimea E , este

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

atunci a n -a zecimală a lui N va fi :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

După cum se vede, N nu este egal cu numărul n din E și cum n este un număr oarecare, N nu va aparține mulțimii E , cu toate că ar trebui să aparțină, fiind definit printr-un număr finit de cuvinte".

— Acum, Bădie, dacă tot ai început să citești, te rog continuă și cu paradoxul lui Berry.

— Numai că Poincare nu scrie că paradoxul următor este al lui Berry, ci „domnul Russell citează încă o altă antinomie, destul de amuzantă". Așa că te invit să-1 spui singur, mai întâi ca să nu te înveți cu nărav și apoi pentru că exemplul dat de Poincare nu-i chiar paradoxul lui Berry, ci o variantă a lui.

— În paradoxul lui Berry e vorba de definiția unui număr. Fiindcă în orice dicționar numărul cuvintelor cuprinse în el este finit, să considerăm toate frazele ce se pot face cu cel mult 50 de cuvinte alese din dicționar. Numărul acestor fraze este și el finit, fiindcă s-au format cu un număr finit de cuvinte. Din aceste fraze se aleg acelea care definesc numere naturale și fie T - mulțimea lor. Desigur că mulțimea T *nu cuprinde* toate numerele naturale, căci au rămas pe dinafară toate acele numere naturale care se definesc prin fraze ce cuprind *mai mult decât 50 d'e cuvinte*. Aceste numere le așezăm în ordine crescătoare și pe cel mai mic îl numim *numărul lui Berry*. Acest număr se definește astfel: „Numărul lui Berry este numărul cel mai mic care *nu* se poate defini printr-o frază formată din cel mult cincizeci de cuvinte cuprinse în dicționar". Acum să numărăm cuvintele prin care se definește *numărul lui Berry*.

— Nostim de tot ! Numărul cuvintelor din care este compusă definiția lui este 27, adică mai puțin de 50, prin urmare *el nu există*, căci toate numerele formate cu mai puțin de 50 de cuvinte se află în mulțimea T , or, noi l-am ales din afara

acestei mulțimi.

— Cred că aceste antinomii au dat de furcă matematicienilor, mai ales logisticienilor.

— Doar nu degeaba a scris Poincare că logica nu-i stearpă ! A știut el ce spune !

— Da, la început e adevărat că aceste antinomii, care răsăreau ca ciupercile după ploaie, erau o amenințare serioasă pentru cei ce se străduiau să dovedească identitatea dintre matematică și logică, dar după aceea s-au deprins cu ele și le căutau explicații.

— Vreți să spuneți că logisticienii au continuat să rămână logisticieni ?

— Bineînțeles ! Iată, am adus cu mine o foarte frumoasă cârtică scrisă de Hans Hahn (23), unul dintre întemeietorii *Cercului vienez*, grupare renumită care, prin conferințele și prin publicațiile sale, a adus o largă contribuție la problema fundamentării logicii și a științelor naturii. Vreau să citesc numai un fragment din capitolul intitulat „*Logică și realitate*”, deși, dacă aș putea, mi-ar plăcea să recitesc toată cartea, de la început pînă la sfîrșit, aici, împreună cu dumneavoastră. Paragraful acesta este intitulat „Deducerea logică” : — Am ajuns la un punct fundamental; convenția pentru folosirea cuvintelor *nu* și *sau* este de așa natură că dacă formulez două enunțuri: *A este roșu sau verde* și *A nu-i roșu*, prin aceasta am spus : *A este verde*. Aici este baza a ceea ce se numește *deducerea logică*. Ea nu se sprijină în nici un fel pe aceea că între anumite comportamente ar exista un raport de fapte pe care l-ar sesiza gîndirea : ea decurge numai din felul în care vorbim despre obiecte. Acela care nu vrea să admită deducerea logică, nu are, de exemplu, un alt mod de a vedea comportamentul lucrurilor, dar nu acceptă să folosească aceleași reguli, ca mine, ca să vorbească de ele. Noi nu ne putem înțelege : inutil de a continua conversația fiindcă nici unul nu cunoaște limba celuilalt. Iată ce ne aduce deducerea logică : ea ne dă conștiința de tot ce am

afirmat, folosindu-se de convențiile limbajului... pronunțând cele două propoziții : *A este roșu sau verde*. *A nu este roșu*, concomitent și implicit afirmă că *A este verde*". În paragraful următor „La ce servește logica" spune : „Cititorul s-ar putea întreba atunci, la ce servește logica dacă este adevărat că enunțurile ei sînt tautologice și nu exprimă nimic despre lucruri... Propozițiile logice pe care le-am luat ca exemplu au derivat din convențiile asupra folosirii cuvintelor *sau* și *nu* ; se poate arăta că același lucru se petrece cu orice enunț din ceea ce se numește logica propozițiilor. Dar , mai întîi, de ce are nevoie limba de cuvintele *sau* și *nu* ? Aceasta-i pentru că noi nu știm totul, pentru că nu sîntem atotștiutori... Limba noastră este făcută astfel încît afirmînd unele propoziții constatăm că am afirmat altele, legate de acelea în mod implicit ; noi nu le observăm imediat, deducerea logică ne permite să ne dăm seama de aceasta".

În capitolul următor „Matematica și realitatea" găsim profesiunea de credință a logisticianului convins, motivînd de ce *matematica este tautologică* : „Propozițiile ei, ca și acelea ale logicii, nu spun nimic de obiectele despre care este vorba ; ele sînt tautologice și nu tratează decît modul în care ne exprimăm despre ele. Dacă putem afirma, necondiționat, că $2 + 3$ face oricînd 5, că $2 - 2$ nu poate fi niciodată 7, motivul este că prin $2 - 3$ noi gîndim exact același lucru ca și prin 5... Dar dacă $2 + 3$ ne spune același lucru ca și 5, ca să înțelegem aceasta trebuie să ne ducem cu gîndul înapoi, la ceea ce am convenit să gîndim prin 2, prin 3, prin 5 și prin semnul $+$; după aceea le transformăm prin tautologie pînă ce observăm că prin $2 + 3$ noi ne gîndim exact la 5. Acest act de cascade tautologice eşalonate înseamnă *a calcula*, *a socoti* ; adunarea și înmulțirea pe care le învățăm la școală sînt pregătiri pentru aceste transformări tautologice. Orice demonstrație matematică constă dintr-o serie de transformări de acest fel. Avantajul lor este că

noi nu vedem dintr-odată, de exemplu, că 24×31 înseamnă același lucru ca și 744, ci că operațiile acestei înmulțiri sînt transformări progresive, de-a lungul cărora observăm că prin convențiile acceptate la folosirea simbolurilor (numere, semnele + și \times) se ajunge, odată transformarea terminată, să gîndim același lucru ca și înainte de a o fi făcut, adică să știm că 744 este ceea ce se înțelege prin 24×31 . Trebuie să mărturisim că demonstrarea caracterului tautologic al matematicii nu este încă bine stabilit în toate punctele ei; aceasta este o problemă foarte anevoioasă și plină de greutate, dar nu ne îndoim că ideea unei matematici tautologice prin esență este justă. Multă vreme s-a susținut cu îndârjire contrariul; în special Kant a persistat. Poincare a adus argumente ca acestea : pentru că este imposibil ca matematica să fie o vastă tautologie, trebuie să cuprindă, undeva, un principiu apriori. În adevăr, e greu de crezut, dintr-odată, că matematica întreagă, cu propozițiile ei așa de anevoios stabilite, cu descoperirile ei adesea surprinzătoare, se poate reduce la tautologie. Dar să observăm că această argumentare uită un mic lucru : faptul că noi nu sîntem atotștiutori. Desigur că un spirit atotștiutor ar cunoaște deodată tot ce se afirmă simultan într-un grup de propoziții; el ar ști imediat că din cauza convențiilor asupra simbolurilor numerice și a semnului \times , gîndim la același lucru prin 744 ca și prin 24×31 . Un atare spirit nu are nevoie nici de logică și nici de matematică. Dar nu-i acesta cazul nostru ; noi sîntem obligați, ca să ne dăm seama, să urmărim o întreagă cascadă de transformări tautologice ; de aceea avem o adevărată surpriză cînd constatăm că prin afirmarea unor enunțuri afirmăm ceva care pare să fie cu totul diferit, că anumite simboluri complexe cu aspect exterior foarte diferit, ne fac să gîndim, în fond, la același lucru".

— Dacă ne mai citești vreo două pagini ca acestea, eu cel puțin mai, mai că trec la logicism !

— Nu v-am crezut așa de slab de înger, dragă doctore ! Parcă erați intuționist ? Voiam să mă opresc aici, dar mărturisirea dumneavoastră mă obligă să vă citesc și *Concluzia*, cu care se încheie cartea. N-am dreptul să distrug elanul... Iată deci cum se desparte autorul de cititor : „Toate acestea sînt combătute, o știu. Ideile noastre ne obligă să luptăm pe două fronturi; sîntem atacați pe de o parte de pretinsul *bun simț* ; nefiind curente, vederile noastre sînt considerate paradoxale ; dar acest *bun simț* ar trebui să se numească mai degrabă *simțul comun*, fiind doar rămășița vechilor obiceiuri de a gîndi, devenite, prin aceasta însăși, comode și scumpe ; acest simț comun — și inert — se apără de tot ce nu-i este familiar. Avem să luptăm, de asemenea, contra simțului *profund* al metafizicii, care, în adevăr, este un nonsens. Dar chiar dacă adversarii noștri formează o majoritate considerabilă, întăriți în poziții milenare, sîntem siguri că succesul ne este asigurat, că ideile noastre progresaază”. Vreau să mai adaug că această carte a fost scrisă în anul 1934 și e ultima carte a lui Hans Hahn, care a murit în același an. Previziunea lui nu a fost dezmințită, căci logicismul are foarte mulți partizani, în ciuda celorlalte curente, la fel de îndîrjite să-și apere convingerile lor !

— Și credința lui Russell în logicism era tot așa de statornică ; nici o antinomie nu i-a putut-o zdruncina.

— Ba chiar mai mult ! Era convins că *Principia mathematica* va dăinui cel puțin pînă în anul 2100 !

— De unde știi mata asta, Bădie ?

— Am găsit undeva că matematicianul G. H. Hardy a scris despre visul pe care l-a avut odată Russell. El zicea că a fost un vis oribil. (18, p. 1 855)

— Cine zicea, Hardy ?

— Nu, Russell. Dar mie nu-mi pare chiar oribil ! Oricum rămîne să judecați dumneavoastră cu toții.

— Asta după ce-1 vom afla !



Godfrey Harold Hardy

— Russell povestește că s-a visat, prin anul 2100, în etajul de sus al Bibliotecii Universității din Londra. Un asistent al Bibliotecii mergea pe lângă rafturile cu cărți, ducînd după el un coș enorm și lua din raft cîte o carte pe care o privea și apoi, fie că o arunca în coș, fie că o așeza din nou în raft. În sfîrșit, a ajuns la trei volume mari, pe care Russell le-a recunoscut : era ultimul exemplar ce mai exista din *Principia Mathematica*. Asistentul a luat unul dintre volume, l-a răsfoit și a rămas o clipă încurcat de curiosul symbolism pe care l-a văzut, apoi a închis volumul, l-a cumpănit în mîna și a ezitat... în clipa aceasta s-a trezit.

— Așa, fără să știe ce s-a întîmplat cu volumele sale ?

— Cred și eu, emoția...

— Important este că volumele au rezistat pînă în anul 2100, adică un veac și mai bine de acum înainte ! Așa optimism, mai zic și eu.

— Da, și totodată un optimism rezonabil, căci Russell a recunoscut că symbolismul lui fusese depășit. Asistentul nu mai cunoștea sistemul, de aceea s-a uitat curios la el. Acum îmi aduc aminte

că am citit și eu această poveste chiar într-o traducere românească. Cartea se cheamă : G. H. Hardy : *Crezul meri ? Matematica*, și a apărut în Editura Enciclopedică Română , în București, 1970. (p. 86)

— Ba, poate că era de altă specialitate și atunci nu era obligat să cunoască notația introdusă de Russell !

— Adevărat, dragă doctore, așadar... votați cu logicismul ?

— Stai, așteaptă pînă data viitoare, cînd mi se pare că trebuie programat formalismul, dragă Nucule !

— întocmai, cu David Hilbert ca figură centrală. Bine, am să aștept !

— Am să răspund atacului dumneavoastră cu o anecdotă, dealtfel bine cunoscută. Se spune că un sultan s-a hotărît să facă el însuși judecățile și să nu le mai lase pe seama vizirului său. Așadar, a ascultat pe împricinat și cînd acesta a terminat să arate ce avea pe suflet i-a spus :

— Ai dreptate ! Apoi a venit la rînd și cel pîrît. Și acesta și-a spus păsul, iar cînd a terminat, sultanul i-a zis și lui : —Ai dreptate !Atunci vizirul s-a aplecat la urechea sultanului și i-a șoptit : — Luminăția ta, nu se poate să aibă dreptate și păgubașul, și pîrîtul. La acestea sultanul a răspuns : — Și dumneata ai dreptate !

— Exemplu tipic de logică trivalentă ! Așadar, v-ați întors la intuiționism ?

— Habar n-am de cele ce-mi puneți în cîrcă, dar vă suport învinuirile pînă ce mă voi familiariza și cu formalismul, și cu intuiționismul; pe urmă voi-hotărî.

— Sînteți așa de sigur că veți putea-o face ? Matematicienii, adică mai bine zis cei ce înclină înspre filosofia matematicii, au timp să aștepte, uneori chiar milenii, pînă să ia o hotărîre ; nu-i ca la dumneavoastră, cînd o amînare sau o nehotărîre în privința unei decizii poate fi fatală !

— Tocmai acest orizont larg, acest spațiu din

care a dispărut parcă timpul mă atrage și mă liniștește, ca muntele împădurit, ca marea nemărginită. De aceea, abia aștept să ne vedem miercurea viitoare, dacă nimic nu mă va împiedica !

VI

ADEMENTIT DE ILUZII...

— De la începutul săptămînii am așteptat ziua aceasta ca pe o mare sărbătoare.

— Adică, vrei să insinuezi că celelalte miercuri nu ar fi fost sărbători ?

— Comparîndu-le cu cea de azi, nu. Aceasta de acum am văzut-o cu alți ochi și am așteptat-o altfel, fiindcă aveam impresia că azi nu ne mai întîlnim, aici la mata, Bădie, ci în Sala de lectură a Universității din Gottingen !



Grupul de la Gottingen

— Cum ? Așa dintr-odată, fără pașaport și fără să ne întrebăm și pe noi dacă sîntem dispuși să facem această călătorie ?

— Fără ! Ca să vă dovedesc, vă rog să priviți această fotografie și să vedeți unde sîntem și alături de cine stăm ! (22, p. 228)

— „Clubul matematicienilor din Gottingen”. Da, societatea nu-mi displace, numai că pe vremea aceea, în 1902, nici unul dintre noi nu se născuse încă !

— Asta nu are nici o importanță. Iată-1 pe Felix Klein, întemeietorul și animatorul clubului, pe David Hilbert, care a venit în Gottingen exact la 100 de ani după Gauss, ca să continue și să întărească tradiția științifică pe care o inițiasă cu un veac mai înainte marele Gauss : *Princeps mathematicorum*, și care, cu strălucirea minții lui ne va lumina după amiaza aceasta, iată-1 și pe Zermelo, care ne răspunde și nouă, cu același sarcasm ca și tuturor celor noi veniți la Gottingen, ce se mirau de numele lui : „Păi, să vedeți, de fapt eu m-am numit *Walzermelodie*, dar, din economie, au fost suprimate prima și ultima silabă. Iată-1 și pe Robert Courant, atunci student la Gottingen și apoi profesor acolo, și prietenul de o viață al lui Hilbert. Când Hitler a ajuns la putere, atît Courant, cît și aproape toți matematicienii



Robert

din Gottingen au fost expulzați, în afara lui Hilbert. Departea de Hilbert, Courant și-a manifestat mereu admirația și dragostea pentru profesorul său. Iată și *Cuvîntul înainte* pe care l-a scris el la cartea aceasta, în 1969, ca unul dintre puținii supraviețuitori ai Clubului din Gottingen : „David Hilbert a fost unul dintre adevărații mari matematicieni din timpul lui. Opera lui și personalitatea sa științifică inspiratoare au influențat adînc dezvoltarea științei matematice pînă în timpul prezent. Viziunea lui, puterea lui de lucru în domeniul matematicilor și originalitatea lui independentă, de gînditor, suplețea și diversitatea preocupărilor lui a făcut din el un pioner în multe și diferite domenii ale matematicii. Era o personalitate unică, profund cufundat în opera sa și dedicat cu totul științei, un profesor și un conducător de cel mai înalt nivel, inspirator, și mai ales generos, neobosit și statornic în toate strădaniile lui ...” Autoarea, Constance Reid, citează încă multe alte observații ale lui Courant, dar dintre ele am ales-o pe aceasta, legată de pasiunea lui Hilbert pentru grădinărie, în care se putea întrezări: „o fantastică balanță între o intensă concentrare și o completă relaxare (22, p. 109). Aici, în



**David Hilbert
fi Hermann**

fotografia aceasta iată-1 pe David Hilbert cu Hermann Weyl, cu trei ani mai în vîrstă decît Courant, care i-a fost mulți ani asistent și care a publicat, în 1944, după moartea lui Hilbert (februarie 1943) un articol: „David Hilbert și opera lui matematică”, reprodus, sub o formă prescurtată în această carte, articol din care voi citi azi cîteva rînduri. Am găsit în cartea aceasta atîtea lucruri extraordinare, care m-au tulburat, că nici nu știu despre ce să vorbesc mai întîi ?

— Despre asta nici nu trebuie să ne spui ; s-a văzut de cînd ai pus cartea pe masă. De altfel, îți mărturisesc că ea m-a tulburat și pe mine și, după cît se pare, și pe colegul Teodor.

— E adevărat, numai că dintr-o pricină pe care nu cred că o bănuiești ! Privește ce scrie aici : „Donația prof. Vera Myller-Lebedev, Iași, 1970”.

— Așa-i, Nucule, donatoarea acestei cărți a fost profesoara noastră la Algebră. Și a fost poate chiar mai răvășită decît tine citind această carte, căci ea a fost eleva lui David Hilbert și a trecut la el examenul de doctorat. Acolo a simțit ea primele vibrații ale creației științifice și a trăit acolo, la

Gottingen, cei mai frumoși ani ai stu-

...

Hilbert

i

s

■ s
Ne*

> ' « ;

**Coperta
volumului
„Hilbert“**

denției. Ți-am spus acestea ca să vezi din câte pricini diferite, privind o fotografie sau o carte, inima poate să bată mai tare ca de obicei.

— Dar poate că ar fi mai bine să terminăm cu poveștile noastre, ca să-1 lăsăm pe Nucu să ne vorbească despre Hilbert și opera lui.



Vera Myller-

— Atunci, ca o introducere la problema despre care vom vorbi astăzi, am să amintesc de cartea clasică a lui Hilbert, *Bazele geometriei*, publicată în 1899. În această lucrare, Hilbert a pus bazele riguroase ale geometriei elementare, folosind metoda axiomatică.

— Dar, după câte știm noi, și Euclid a stabilit geometria tot pe bază axiomatică.

— Așa-i. Până în secolul al XIX-lea, geometria euclidiană a reprezentat modelul de știință axiomatizată. Prin asta se înțelege faptul că o teoremă apărea ca o *consecință* a unui număr finit de propoziții, numite axiome. Numai că această noțiune de consecință a cam încurcat treburile atunci când matematicienii au căutat să stabilească dacă nu cumva o anumită propoziție dată — să

zicem axioma paralelor — nu este o consecință a altor axiome. Iar dacă această întrebare și-a găsit răspunsul prin crearea geometriilor neeuclidiene, metoda axiomatizării stabilită de Euclid își aștepta o nouă înfățișare, aceea pe care i-a dat-o Hilbert.

Axiomatizarea, așa cum a conceput-o Hilbert, este cu totul diferită de cea stabilită de Euclid. El a introdus punctul de vedere *abstract* în definirea noțiunilor elementare ; punct, dreaptă, plan. Acestea sînt obiecte geometrice lipsite de orice conținut intuitiv. Proprietățile lor formale și relațiile dintre elementele fundamentale, specificate de termenii „a fi pe”, „între”, „congruente” ș.a. sînt stabilite prin cinci grupe de axiome, anume : axiome de incidență, de ordonare, de congruență, axioma paralelelor și axiomele de continuitate.

În articolul despre care v-am vorbit, Weyl povestește că în 1891, pe cînd Hilbert asculta o conferință despre anumite probleme de geometrie, a făcut o observație care conținea în sîmbure punctul lui de vedere axiomatic. Anume a spus : „ar trebui să fie posibil ca în toate teoremele de geometrie să se poată înlocui cuvintele : punct, linie și plan cu masă, scaun și halba de bere”.

— Știi că au mai fost și alții, înaintea lui Hilbert, care au gîndit așa ?

— • Nu, cine ?



Jean le Rond D'Alembert

— D'Alembert. în istoria matematicilor, scrisă de Bourbaki, se arată că în articolul din *Enciclopedie* relativ la „Definiții”, d'Alembert are această observație : „s-ar putea face elemente de geometrie exacte (dar ridicole), numind triunghi ceea ce de obicei se numește cerc”. (p. 34)

— Doar nu degeaba se spune că „nu-i nimic nou sub Soare” ! Lui Hilbert i se datorează nu numai metoda pe de-a întregul axiomatizată, dar și analiza sistematică și riguroasă a sistemului axiomatic prin discutarea condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească aceste axiome, dacă ele formează baza unei teorii deductive. Hilbert nu s-a limitat numai la formularea unui sistem de axiome din care să deducă geometria euclidiană, ci, după cum se poate observa din examinarea axiomelor enunțate, acestea au fost *ordonate* în grupuri de natură diferită. Se poate stabili astfel caracteristica fiecărui grup în parte, consecințele logice ce decurg din ele și chiar *diversele geometrii* ce se pot obține, prin suprimarea sau modificarea unora dintre axiome.

— Atunci să vedem ce condiții se impun, în general, unui grup de axiome ale unui sistem

deductiv ?

— Sînt mai multe condiții, dar noi ne vom limita la următoarele trei: *necontradicția sau consistența* axiomelor, *suficiența și independența* lor.

— Condiția că axiomele să nu se contrazică între ele e foarte firească. La baza unei teorii deductive n-ar putea exista o axiomă *A* și, totodată, axioma contradictorie *non-A*. Dar nu înțeleg de ce ai legat *necontradicția* de *consistență* ?

— Aceasta este o problemă foarte complicată, stimate doctore. Necontradicția axiomelor și deci a teoremelor ce vor rezulta din ele nu-i chiar așa de ușor de stabilit. De pildă, din faptul că propozițiile aritmeticii nu sînt contradictorii, după experiența de milenii pe care o avem de cînd le cunoaștem și le folosim, putem afirma că axiomele pe care se bazează aritmetica sînt necontradictorii. Dar atunci cînd se stabilește un sistem de axiome, nu se poate ști dacă, odată, cine știe cînd, nu va apărea o teoremă alături de alta contradictorie ei, și aceasta, ca o consecință a sistemului de axiome. De aceea, condiția de *necontradicție* a unui sistem de axiome se înlocuiește prin condiția de *consistență*. Aceasta înseamnă că putem afirma că un sistem de axiome este *consistent* (iar prin aceasta și necontradictoriu) dacă îl pot lega de o altă teorie *care se bazează pe un sistem de axiome necontradictoriu*. Hilbert, de pildă, a legat necontradicția axiomelor din geometrie de aceea a axiomelor din aritmetică, pe care le admitea că sînt necontradictorii.

— Adică sistemul de axiome ale geometriei despre care mi-ai vorbit este numai *consistent* ?

— Da, dar prin aceasta se admite că este necontradictoriu !

— Dar ce legătură a putut stabili Hilbert între aritmetică și geometrie ?

— Mi se pare că problema aceasta am discutat-o cîndva! Prin introducerea sistemului de coordonate de Fermat și Descartes, s-a făcut în mod automat legătura dintre geometrie și

aritmetică, fiindcă unui punct geometric îi corespunde unul sau mai multe numere. Așadar geometria întreagă poate fi tradusă în limbajul aritmetic !

— Ai dreptate, la asta nu m-am gândit, deși aș fi putut-o face ! După câte înțeleg, înseamnă că Hilbert nu a demonstrat necontradicția axiomelor geometriei, ci le-a aruncat în circa aritmeticii ! Bine, atunci să vedem mai departe : prin *independența* axiomelor cred că se înțelege faptul că axiomele sînt alese în așa fel încît adevărurile rezultate din una dintre ele să nu fie exprimate și de o alta. Cu alte cuvinte, să nu se considere mai multe axiome decît trebuie. Dar cu *suficiența* ce-i ? Ea nu este legată de independența axiomelor ?

— Da și nu. Numai într-o teorie care are la bază un *sistem suficient de axiome* se poate demonstra *orice teoremă* : A — sau $\text{non-}A$ —, formulată în cadrul acestei teorii. În acest caz, teoria respectivă se numește *completă*.

— Dar asta-i la mîntea cocoșului, că numai una dintre teoreme să poată fi demonstrată ! Altfel am ajunge doar la un sistem contradictoriu !

— M-ați înțeles greșit, stimate doctore ! Nu-i chiar așa de sigur că într-o teorie deductivă dată se poate demonstra orice teoremă : A sau $\text{non-}A$, formulată în cadrul acestei teorii. Nu-i vorba numai de *una dintre ele* și *nu de amîndouă*, ci de *niciuna dintre ele* ! Cu alte cuvinte, pot exista teoreme care să nu poată fi demonstrate, oricît s-ar strădui matematicienii să o facă atunci cînd sistemul nu este *complet*.

— Acum am înțeles și cred că știu chiar și un exemplu : teorema celor patru culori !

— Da, asta și încă altele, despre care vom vorbi noi chiar azi.

— Spinoase probleme mai aveți și dumneavoastră matematicienii ! Una dintre ele rămîne totuși consistența aceea a geometriei. Necontradicția aritmeticii a putut fi dovedită ?

— Tocmai aici e hiba ! Ca să o dovedească,

Hilbert și-a propus să axiomatizeze și aritmetica. După cum se știe, Euclid a prezentat aritmetica în *Elemente* ca pe o dezvoltare logică a tuturor teoremelor ei, pornind de la noțiunea de unitate. Este metoda numită genetică sau constructivă. În lucrarea apărută în 1900 cu titlul: *Despre conceptul de număr*, Hilbert a elaborat sistemul de axiomatizare a aritmeticii, luând ca model metoda folosită de el în *Bazele geometriei*. „Punem întrebarea”, scria el în această lucrare din 1900, „dacă în realitate metoda genetică este singura adecvată pentru studiul conceptului de număr, iar metoda axiomatică pentru bazele geometriei ? ... Părerea mea este următoarea : în ciuda înaltei valori pedagogice și euristice a metodei genetice, metoda axiomatică merită totuși prioritate la expunerea definitivă și garantarea logică a conținutului cunoștinței noastre. În teoria conceptului de număr, metoda axiomatică se formulează astfel: Gîndim un sistem de lucruri; numim aceste lucruri numere și le notăm cu a, b, c, \dots Gîndim aceste numere în anumite relații reciproce a căror descriere precisă și completă are loc prin următoarele axiome” (14, p. 384). În cazul aritmeticii, Hilbert a stabilit numai patru grupuri de axiome : 1) axiome de incidență, 2) de calcul, 3) de ordonare și 4) axiome de continuitate. Dar în afară de axiomatizarea aritmeticii el nu a mers mai departe, căci au rămas nedemonstrate independența și necontradicția axiomelor aritmeticii. În anii imediat următori însă s-a întîmplat un eveniment care „putea să aibă un efect catastrofal pentru matematică” — aceasta este chiar expresia lui Hilbert. Îl ghiciți care ?

— Cred că trebuie să fie vorba de apariția cărții lui Russell, în 1903.

— Aveți perfectă dreptate, stimate profesore. Hilbert a citit-o și astfel a aflat de antinomia lui Russell tocmai atunci cînd el se frămînta să găsească o modalitate de a stabili necontradicția aritmeticii !

— Asta i-a venit, exact cum se spune, „colac peste pupăză”.

— De aceea, la Congresul Internațional al matematicii, care s-a ținut în 1904, la Heidelberg, a renunțat la subiectul pe care se pregătea să-l prezinte, ca să-și îndrepte atenția către fundamentele aritmeticii. El a vorbit acolo despre „Bazele logicii și ale aritmeticii”, arătând că există o cale prin care antinomia lui Russell ar putea fi eliminată, fără a aduce prea multe îngrădiri matematicii, căci și el considera, ca și Cantor, că „esența matematicii constă în libertatea ei”. Ideile pe care le-a susținut în cadrul acestui Congres nu au prea fost înțelese atunci: ele anticipau metoda lui de mai târziu, pentru a stabili necontradicția aritmeticii. „Dificultățile întâlnite la fundamentarea aritmeticii, spunea el, „sînt în parte de altă natură decît acelea ce trebuiau învinse la fundamentarea geometriei. Atunci cînd am examinat bazele geometriei, anumite dificultăți de natură pur aritmetică au putut fi lăsate deoparte ; la fundamentarea aritmeticii, invocarea altei discipline fundamentale apare de nepermis”. Iar mai departe, după o analiză critică a diverselor lucrări privind fundamentarea aritmeticii, pe care le-am discutat și noi, spune : „Aritmetica este considerată ca o parte a logicii și de cele mai multe ori la fundamentarea aritmeticii se admit ca premise conceptele fundamentale tradiționale ale logicii. Numai că, studiind cu atenție, observăm că în expunerea obișnuită a legilor logicii se întrebuintează anumite concepte fundamentale ale aritmeticii, de pildă, conceptul de mulțime, în parte chiar conceptul de număr, îndeosebi de număr indicator. Ajungem astfel într-o situație fără ieșire și, de aceea, pentru evitarea paradoxurilor este necesară o dezvoltare parțial concomitentă a legilor logicii și ale aritmeticii”. (14, p. 393)

— Și care-i soluția pe care o propune Hilbert ?

— El propune o formalizare a logicii și a aritmeticii astfel ca propozițiile lor să se exprime

prin aceleași elemente comune : *semne lipsite de orice semnificație*, și diferitele lor combinări, efectuate după axiome privind calculul propozițiilor respective. Pentru a stabili necontradicția, Hilbert a propus repartizarea „combinația obiectelor de bază în două clase, a existentelor și a neexistentelor”.

— Asta nu mai înțeleg deloc ! Ce înseamnă „obiect de bază” și „existent ori neexistent” ?

— Am să citez ce spunea Hilbert : „Se numește obiect al gândirii sau, mai pe scurt, *obiect*, un lucru din gândirea noastră și se înseamnă cu un simbol” ; *acesta este obiectul de bază*. în clasa obiectelor existente, Hilbert considera axiomele și toate propozițiile deduse prin reguli admise, iar în clasa obiectelor neexistente, toate propozițiile negative sau nedemonstrabile. Prin această separare Hilbert credea că va putea demonstra imposibilitatea ca o propoziție să se afle în aceeași clasă cu negația ei.

— Am o carte în care J. Dieudonne ne înfățișează, într-o formă foarte sugestivă, concepția hilbertiană. Ascultați : „Matematica devine un joc în care piesele sînt semne grafice care se deosebesc între ele prin forma lor. Cu aceste semne se formează asamblaje care, după forma lor, se vc' numi *relații* sau *termeni* : în virtutea unor anumite reguli anumite relații sînt considerate ca adevărate ; aite teguli permit să se formeze relații adevărate fie pornind de la niște relații oarecare, fie pornind de la alte relații adevărate. Punctul esențial este că aceste reguli sînt așa stabilite încît pentru a verifica dacă s-a ținut seama de ele e de-ajuns să cercetăm forma asamblajelor care intră în joc. Este important să observăm că sensul cuvintelor *relație* și *termen* este pur convențional : se pot compara aceste cuvinte cu termenii din jocul de șah, ca, de exemplu: „șah”, „mat”, „rocadă”, ... care sînt folosiți ca să caracterizeze, într-un mod prescurtat, anumite situații sau anumite mișcări din joc, descrise pe larg prin reguli ... ” (24)

— Am auzit de multe ori de această comparație

a matematicii cu un joc de șah ; chiar și Poincare o menționează undeva, combătînd-o, dar nu știam că a folosit-o și acest bine cunoscut matematician francez, J. Dieudonne.

— Aș vrea să mai adaug că Hilbert a propus, tot în cadrul acestei comunicări de la Heidelberg, ceva cu totul nou, anume că *demonstrația însăși să devină obiect al cercetării matematice*. De altfel, comunicarea aceasta a fost considerată ca deosebit de interesantă și a fost tradusă îndată în limba franceză și în limba engleză și publicată în revistele de specialitate. Însuși Poincare a spus că în ea se găsesc idei dintre cele mai profunde, dar aceasta nu l-a împiedicat să o foarfece în articolul său „Logicile noi”. (5, p. 179)

— Și Constance Reid a semnalat observația matală, Bădie, în cartea ei. Iată ce scrie la pagina 99 : „Poincare a comentat de multe ori, nefavorabil, această idee” (adică a teoriei demonstrației, cum se va numi de aici înainte studiul asupra demonstrației) și continuă cu aluzii la controversele care au existat între aceste două minți geniale. Dar după comunicarea de la Heidelberg se pare că interesul lui Hilbert pentru fundamentarea aritmeticii a dispărut, căci timp de 18 ani el nu a mai publicat nimic în legătură cu aceasta, cercetările lui Hilbert îndreptîndu-se în alte direcții. În acest timp, problema fundamentării aritmeticii a continuat să preocupe pe mulți matematicieni. Ne amintim că Russell și Whitehead au publicat cele trei volume din *Principia*, apoi Zermelo a stabilit, în 1904, teorema asupra mulțimilor bine ordonate și, în continuare, a formalizat și axiomatizat teoria mulțimilor.

— Dar despre ultimul rezultat al lui Zermelo nu ne-ai vorbit nimic !

— Nu, pentru că această problemă depășește cadrul discuțiilor noastre. Pot cel mult să spun că el, împărtășind părerea profesorului său Hilbert, considera că teoria mulțimilor este independentă de logică și deci nu era de acord cu încorporarea ei

în logică, cum a făcut Russel și Whitehead. Așa că pentru a găsi un remediu contra paradoxului lui Cantor sau a lui Burali-Forti, Zermelo, — iar mai târziu și alți matematicieni — a formalizat și a axiomatizat teoria mulțimilor.

— Cum adică, i-au dat o bază axiomatică, așa ca în geometria euclidiană ?

— Exact, după modelul în care a axiomatizat Hilbert geometria, Zermelo a axiomatizat, în 1908, teoria mulțimilor, înseamnă că obiectele ca : mulțimi, submulțimi etc. nu mai au nici un înțeles intuitiv, ci sînt niște *simboluri*.

— Am tot vrut să spun, dar mi-ai luat piuitul, că *simbol* vine de la cuvîntul grecesc *simbalein* care înseamnă : a pune la un loc, a uni două lucruri fără a le confunda. Mi se pare că merge și acum această explicație.

— Cum să nu, de la dumneavoastră știu, dragă profesore, că-i mai bine mai târziu decît niciodată. Desigur că Zermelo, de asemenea, a trebuit să introducă, întocmai ca Hilbert, anumite axiome. Axioma alegerii intră în cadrul acestei axiomatizări. Problema fundamentelor aritmeticii a dormitat în mintea lui Hilbert și s-a trezit brusc abia după ce unul dintre elevii lui, Herman Weyl s-a întors la Gottingen, după ce luptase în primul război mondial. Avea pe atunci 33 de ani și aducea cu el idei noi în legătură cu cercetările despre fundamentele matematice, idei care îl încîntaseră și care aparțineau matematicianului olandez L. E. J. Brouwer. Brouwer era cunoscut în lumea matematicienilor prin contribuțiile sale din domeniul topologiei, dar cînd și-a exprimat ideile personale asupra fundamentelor matematicii, matematicienii care se ocupau cu această problemă le-au găsit de-a dreptul de neconceput. Weyl însă nu era dintre aceștia, el a fost entuziasmat de ideile lui Brouwer, care, spunea el „ne-a deschis ochii” și ne-a făcut să vedem că activitatea matematică își are originea în intuiție, ea fiind aceea care dă *claritatea conceptelor și*

deducerilor sale. Aceste idei, la care se adăugau acelea că matematica este independentă de logică, de principiul terțiului exclus — care nu se aplică decît la mulțimile finite — sau că alături de A și non- A poate exista o a treia posibilitate, probleme pe care Weyl le discuta cu înșelare, l-au scos din sările pe Hilbert, și astfel a reluat cercetările sale asupra fundamentelor aritmeticii și în particular asupra necontradicției. Dar, totodată, a ținut să se informeze precis asupra teoriei pe care o susținea Brouwer. De aceea l-a invitat la Göttingen ca să-și expună ideile. Comunicarea lui a fost urmată de discuții însuflețite, unii fiind pentru, iar alții contra. Cu această ocazie Hilbert i-a spus lui Brouwer : „Cu metoda dumneavoastră multe dintre rezultatele obținute în matematica modernă ar trebui părăsite, ori pentru mine, lucrul important nu este să avem mai puține rezultate, ci cît mai multe”. La aceste observații s-a asociat și Hans Lewy, pe atunci docent la Göttingen, care a spus : „Se pare că există unii matematicieni cărora le lipsește simțul umorului sau au un surplus de conștiință. Ceea ce a afirmat Hilbert mi se pare foarte drept. Dacă am avea de învins atîtea încercări cîte le-a arătat Brouwer, atunci nimeni nu ar mai dori să fie matematician. În definitiv, este o activitate omenească și pînă ce Brouwer va putea dovedi o contradicție în matematica noastră clasică, nimeni nu-i obligat să-l asculte. Iată, după părerea mea, calea pe care s-a dezvoltat logica : s-a acceptat un principiu pînă cînd cineva a observat că duce la o contradicție și atunci el a fost modificat. Cred că acesta este drumul și va fi întotdeauna. Pot exista multe contradicții și îndată ce vor apărea, toți matematicienii vor dori să le elimine. Dar pînă atunci, noi vom continua să acceptăm acele principii care permit un progres mai rapid”. După această întîlnire, Hilbert s-a concentrat mai adînc asupra fundamentelor aritmeticii, alarmat de adeziunile mereu crescînde ale tineretului pentru ideile lui Brouwer, idei pe

care Hilbert le considera, pur și simplu, periculoase. (22, p. 154) La Consfătuirea matematicienilor din 1922, care a avut loc la Hamburg, Hilbert a luat fățiș atitudine contra lui Weyl și Brouwer : „Recunosc că faptele care au dus la formularea antinomiilor din teoria mulțimilor sînt intolerabile, dar renumiții și merituoșii matematicieni Weyl și Brouwer caută soluția problemei pe căi false... Ei încearcă să salveze matematica aruncînd peste bord tot ce li se pare anevoios... ei vor să sfărîme și să denatureze știința... Dacă am vrea să urmărim'această reformă pe care ne-o sugerează, am risca să pierdem o bună parte din cel mai valoros tezaur al nostru".

— Aș fi vrut să asist și eu la această consfătuire. Mi-închipui pe Hilbert, cu cîtă pasiune a pronunțat el aceste cuvinte. Matematica nu-și putea găsi un mai strașnic apărător.

— În adevăr, cîtă vreme scandalul antinomiilor nu luase o formă agresivă, Hilbert și-a căutat liniștit de celelalte probleme care-l preocupau. Dar acum, prin tezele lui Brouwer el vedea amenințată însăși existența matematicii și s-a hotărît să intervină cu autoritate și chiar cu violență, încredințat că astfel va sugruma conflictul „odată pentru totdeauna" !

— Un geniu ca el putea să fie atît de naiv și să creadă că așa ceva ar fi fost cu putință ? „Odată pentru totdeauna" ? Așa de tare credea el în *teoria demonstrației*, care începuse să i se înfățișeze tot mai ademenitor ?

— Tocmai mata te întrebi, Bădie ? Mata, care..., dar mai bine să tac și să-l citez pe Weyl. Să vedem ce credea el despre această atitudine a lui Hilbert. Ne-o spune în articolul de care am amintit, la pagina 268 :

„Hilbert nu voia să facă greul sacrificiu pe care-l cerea punctul de vedere al lui Brouwer și a văzut, cel puțin a proiectat, o cale pe care putea evita dura mutilație. El era convins că se poate reveni la o completă siguranță „fără a comite vreo trădare

față de știința noastră" : „Să interzici unui matematician să folosească principiul terțiului exclus", spunea el, „este ca și cum ai interzice unui astronom luneta sau unui boxeur să-și folosească pumnii".

— Hilbert vorbește de *tezaurul nostru* ; îl arată ?

— Cum să nu ? „Noțiunea generală de număr irațional, aceea de funcție, teoria funcțiilor numerice, numerele transfinite ale lui Cantor, teorema care spune că printre numerele întregi infinite există unul care este cel mai mic, principiul logic al terțiului exclus ș.a.m.d.

— Dar, efectiv, cum l-a apărât ?

— Cu aceasta ne vom ocupa de aici înainte. În articolul „Despre infinit", pe care l-a publicat în 1925, el a dezvoltat ideile sale despre formalizarea aritmeticii și teoria demonstrației sau *metamatică*, fiind convins că această metodă este calea prin care se poate ieși din impasul creat de antinomii și prin care se poate restructura matematica.

— Amîndouă ideile le găsesc cu totul originale și dacă despre formalizare am discutat, despre metamatică nu am făcut-o niciodată. Dacă traduc bine, metamatică trebuie să însemne „alături de matematică". Cum vine asta ?

— Înțelesul vi se va dezvălui treptat. Acum am să vă spun doar că o formalizare completă a matematicii în limbajul logicii simbolice impune ca formulele prin care se exprimă teoremele și demonstrațiile lor să devină ele însele obiect de studiu. Numai așa, considerînd expresiile formalizate, abstracție făcînd de semnificarea lor, se poate stabili necontradicția, însă această analiză nu mai aparține matematicii, ci *metamaticii*. Beth observă că Hilbert a anticipat rezultatul cercetării metamatematice prin următoarele cuvinte : „Matematica este liberă de orice presupunere. Ca să o întemeiez nu am nevoie nici de Dumnezeu, așa cum pretinde Kronecker, nici de

ipoteza unei predispoziții speciale a înțelegerii noastre care să se armonizeze cu principiul inducției complete, cum crede Poincare, nici de o intuiție originală ca Brouwer, nici, în fine, de axiomele infinitului, a reductibilității și a saturației, ca Russell și Whitehead, care sînt presupuneri reale și materiale ce nu s-ar putea compensa printr-o demonstrație a necontradicției".

— Am lîngă mine cartea lui Lautman și este un pasaj aici, care cred că merită să-l cităm, mai înainte de a ne spune tu, ce ai de spus, mai departe.

— Îl știu, Bădie, și ai avut o idee grozavă să ni-l citești. Te ascultăm !

— „Punctul de vedere structural... este acela al metama-tematicii lui Hilbert. Se cunoaște deosebirea care separă concepția hilbertiană a matematicii de aceea din *Principia Mathematica* a lui Russell și Whitehead. Hilbert înlocuiește, prin definiții axiomatice, metoda definițiilor genetice și, în loc să reconstruiască matematica, pornind de la logică, introduce, din contra, trecînd de la logică la aritmetică și de la aritmetică la analiză, noi variabile și noi axiome care lărgesc de fiecare dată domeniul consecințelor. Iată, de exemplu, după Bernays, care a publicat în ediția operelor complete a lui Hilbert un studiu asupra lucrărilor lui Hilbert despre fundamentele matematicii, tot ce crede el că-i necesar să se dea, ca să se formalizeze aritmetica ; calculul propozițiilor, axiomele de egalitate, axiomele aritmeticii ale funcției „următorului” ($a + 1$), ecuațiile de recurență pentru adunare și înmulțire și, în fine, o anumită formă a axiomei alegerii... Matematica se prezintă astfel sub forma unor sinteze succesive în care fiecare etapă nu se poate reduce la etapa anterioară. Mai mult, și aceasta este esențial, o teorie astfel formalizată nu poate aduce cu ea dovada coerenței interne ; trebuie să i se suprapună o metamatematică al cărei obiect de studiu este matematica formalizată, și ea o

studiază din două puncte de vedere : al necontradicției și al completitudinii. Dualitatea planelor pe care Hilbert o stabilește între matematica formalizată și studiul metamatematic al acestui formalism are drept consecință că noțiunile de necontradicție și de completitudine determină un formalism în interiorul căruia ele nu figurează ca noțiuni definite în acest formalism. Pentru a exprima rolul dominant al noțiunilor metamatematice în raport cu matematica formalizată, Hilbert a scris : „Axiomele și propozițiile demonstrabile, adică formulele care se nasc din jocul acțiunilor reciproce (adică a deducerii formale și adăugarea de axiome noi) sînt imaginile gîndurilor care constituie procedeele obișnuite ale matematicii dezvoltate pînă aici, dar nu sînt adevăruri în sensul absolut. Adevărurile în sens absolut sînt mai degrabă punctele de vedere pe care le dau teoria mea, a demonstrației, în ceea ce privește rezolubilitatea și necontradicția sistemelor formale”. Teoria matematică capătă astfel valoarea ei din proprietățile metamatematice pe care structura sa o întruchipează”. (20, p. 26)

— Ce vrea să înțeleagă Hilbert prin rezolubilitate ?

— Asta e iarăși o problemă cam cu ghimpi ! în 1900, cu ocazia vestitului Congres internațional al matematicienilor de la Paris, Hilbert a prezentat 10 dintre 23 de probleme care-și așteptau rezolvarea căci, după cum a afirmat el atunci, era *convins* că *toate problemele matematice se pot rezolva*. Această convingere a lui, enunțată ca un principiu și cunoscut apoi sub numele de *principiul rezolubilității*, s-a dovedit că nu-i întemeiată. Astfel că principiul rezolubilității s-a transformat mai tîrziu într-o problemă fundamentală a matematicii, care se ocupă cu stabilirea cazurilor în care o problemă *poate sau nu poate fi rezolvată* și de aceea ea se numește încă și *problema deciziei*. în citatul de mai sus Hilbert accentuează faptul că teoria demonstrației este în stare să stabilească

rezolubilitatea sau nerezolubilitatea unei probleme. Interesant îmi pare și un alt citat, pe care-l redă C. Reid, al lui A. Tarski (22, p. 218), despre metama-tematica lui Hilbert : „Viitorul istoric al științelor legate de dezvoltarea matematicii de la sfârșitul secolului al XIX-lea și prima jumătate a secolului al XX-lea, va constata că în multe dintre ramurile matematicii Hilbert a avut o importantă și viguroasă contribuție... Un exemplu remarcabil este metamatematica..., primul și cu adevărat profund rezultat a apărut mai înainte ca Hilbert să înceapă opera sa în acest domeniu... Cu toate acestea, pe bună dreptate, Hilbert a fost numit tatăl metamatematicii. Căci el este singurul care a creat metamatematica, privită ca o ființă independentă, el a luptat pentru dreptul ei la existență, sprijinind-o cu autoritatea lui de mare matematician. Și el a fost singurul care... i-a încredințat sarcini ambițioase și importante. E adevărat că așteptările tatălui nu au fost realizate de copil; nu i-a fost dat să fie un copil minune. Dar s-a dezvoltat sănătos și cuminte, a devenit un membru normal al marei familii matematice și nu cred că tatăl ar avea vreun motiv ca să-i fie rușine de acest descendent”.

— Mi se pare că te-ai cam grăbit cu acest citat din Tarski. Cred că doctorul nostru nu a putut sesiza aluziile relativ la „așteptările tatălui”.

— Acestea le bănuiesc și, oricum, le voi înțelege, cred, ulterior. Eu aș vrea însă ceva mai mult : un exemplu concret, care să-mi pună în față cele două etape ale raționamentului: formalizat și lipsit de orice interpretare intuitivă și apoi analiza metamatematică a formulei, ca să se stabilească necontradicția acelei formule.

— Bine, să așezăm deci față în față cele două moduri de exprimare :

Matematic :

Metamatematic :

4 -f-7 = 11 4 -f-7 = 11 reprezintă o formulă arit

metică în care apare semnul egal. Ca să fie adevărată trebuie ca de o parte și de alta a acestui semn să se afle expresii echivalente.

$x \leq x$
formula
 $1 = 1$
variabilei
 $1 = 3$
adevărată.

Formula $1 = 1$ s-a obținut din generală $x = x$ prin înlocuirea x cu constanta 1, și deci o

$1 = 3$ nu este adevărată, căci semnul egal nu permite ca variabila x să ia odată valoarea 1 și a doua oară valoarea 3.

Cazurile pe care le-am arătat eu sînt cu totul naive, dar le consider suficiente pentru ca discuția noastră să poată continua. În *Fundamentele matematicii*, lucrare ce a fost publicată în 1928, Hilbert a insistat asupra formalizării logicii și a aritmeticii precum și asupra noului studiu : metamatematica sau teoria demonstrației. El a arătat că obiectele acestui studiu sînt *toate asamblajele formate din semne*, care reprezintă anumite formule precum și organizarea lor în teoreme, adică „sînt imaginile gîndurilor care constituie procedeele obișnuite ale matematicii dezvoltate pînă acum, dar nu sînt adevăruri în sens absolut”. *Adevărurile în sens absolut* sînt stabilite din punctele de vedere ce rezultă din teoria demonstrației în ceea ce privește rezolubilitatea, completitudinea și necontradicția matematicii formalizate. Pentru ca să fie posibilă construirea acestor asamblaje, Hilbert a stabilit *un număr finit* de simboluri, acest *caracter finitist* fiind considerat a fi o *condiție esențială* ca să se asigure *evidența* legilor de construcție.

Tot în acest articol, Hilbert strecoară și unele ironii. De pildă la adresa lui Brouwer : „Jocul cu formulele, pe care Brouwer îl tratează cu dispreț, are în afară de valoare matematică și o importantă

semnificare filosofică. Fiindcă acest joc cu formulele se realizează după anumite reguli determinate prin care se exprimă *tehnica gândirii noastre*. Aceste reguli formează un sistem închis, care poate fi descoperit și indicat în chip definitiv. Ideea fundamentală a teoriei mele despre demonstrație nu este altceva decât să descriu activitatea intelectului nostru, să stabilesc un protocol asupra regulilor conform cărora procedează de fapt gândirea noastră. Gândirea se desfășoară paralel cu vorbirea și scrierea, prin formarea și juxtapunere de propozițiuni... și cunoscînd aceasta se impune ca o sarcină a științei, să ne elibereze de tot ce-i arbitrar, să ne apere de subiectivismul care s-a manifestat odinioară în părerile lui Kronecker și, după cum îmi pare mie, și-a găsit punctul culminant în *Intuiționism*". (22, p. 186)

— Deși Hilbert se exprimă atît de convingător, cred că nici Brouwer, nici alți intuiționiști nu s-au lăsat convinși de programul propus de Hilbert.

— Desigur că nu. Unii matematicieni l-au acuzat că prin formalismul lui el a redus matematica la un „joc fără sens”, alții că formalizarea completă duce la sterilitate. Și iată ce a răspuns G. H. Hardy la prima acuzație : „Este imposibil să presupunem că Hilbert tăgăduiește semnificarea și realitatea conceptelor matematice și am cel mai puternic argument ca să nu cred aceasta: axiomele și teoremele demonstrabile, o spune el însuși, care rezultă din jocul nostru formalizat, sînt imaginile ideilor care formează subiectul matematicii obișnuite”. (22, p. 184) Cealaltă obiecțiune o analizează Feys : „Formalizarea a decepționat și trebuia să decepționeze ambițiile gratuite ale acelor care așteptau o metodă universală, ușoară, mecanică, ca să verifice toate rezultatele obținute și să obțină altele. Formalizarea este un instrument de rigurozitate și nu un instrument de ajutorare sau de uniformizare ; e natural că marea majoritate a

teoremelor matematice să fi fost stabilite prin metode adaptate mai mult invenției și mai puțin adaptate criticii riguroase. Domeniul propriu al metodelor formalizate este acela al cercetării proprietăților deductive : consistența, suficiența, independența. În acest domeniu, metodele formaliste au deschis mai degrabă perspective noi sau au descoperit limitele nebanuite ale raționamentului decît să aducă problemelor o soluție simplistă și definitivă. Cercetările asupra independenței axiomelor au permis construcția logicilor neclasice. Consistența sistemelor matematice a fost raportată la consistența sistemelor mai evidente... în domeniul problemei deciziei (la care se reduce aceea de a putea verifica *mecanic* valoarea unei aserțiuni) au fost revelate limitările teoremei lui Godel și s-a ajuns, cînd la cunoașterea metodelor de decizie, cînd la cunoașterea cazurilor în care problema este insolubilă. Pe cale de corolar a apărut imposibilitatea de a sistematiza întreaga știință într-un sistem unic satisfăcător". (25)

— Dacă vrei, te rog să mai citești o dată chestia cu *decizia*. Este acolo ceva ce merită discutat.

— „în domeniul problemei deciziei (la care se reduce aceea de a putea verifica *mecanic* valoarea unei aserțiuni)...

— Mulțumesc, atîta am vrut să mai aud odată, fiindcă nu întîmplieră Feys vorbește de *verificarea mecanică*.

— Bineînțeles, dragă Toa, și eu aveau de gînd să ridic această problemă. Dar fiindcă ai început-o tu, eu am să continui, introducînd mai întîi această frază din cartea lui Bourbaki (p. 621) : „Problema deciziei este fără îndoială cea mai ambițioasă dintre toate pe care și le pune meta- matematica : e vorba să știi dacă, pentru un limbaj formalizat dat, se poate imagina un *procedeu universal* cvasimecanic astfel că, aplicat la o relație oarecare a formalismului considerat, să arate, printr-un număr finit de operațiuni, dacă această relație este

adevărată sau nu". Ar rezulta de aici că formalizarea ar reduce gîndirea logică sau matematică la operații pur mecanice, cu alte cuvinte la construirea unei *mașini de gîndit*, ca mașina Turing.

— Turing ? Tînărul matematician englez care a descifrat, în timpul celui de-al doilea război mondial cele mai importante coduri secrete ale armatei germane ?



Alan Mathison

— Da. Fusesse un copil minune și un strălucit student al Universității din Cambridge și, încă din 1936, pe cînd avea 24 de ani, a publicat o lucrare deosebit de importantă care este considerată și azi ca de bază în teoria calculatoarelor electronice. În ea, el făcea o analiză logică a noțiunii de a calcula și de aici se ajungea la concluzia că prin formalizarea matematicii se puteau construi mașini universale care ar putea fi programate ca să rezolve anumite probleme. Prin această lucrare el este un precursor al calculatoarelor electronice, al mașinilor de gîndit.

— Atunci era natural ca el să fi putut descoperi secretele militare ale germanilor, care erau codificate cu o mașină specială „Enigma”. Drivită de ei ca absolut invulnerabilă !

— Și de aceea germanii credeau că descoperirea secretelor lor nu poate avea altă cauză decît trădare și spionaj. Adevărul a fost arătat mai târziu, cînd războiul fusese de mult terminat.

— Construirea *mașinilor de gîndit* i-a făcut pe mulți să-și pună întrebarea dacă ea n-ar fi în stare să înlocuiască pe matematicieni și pe logicieni ? Mai mult, soluția unei probleme, putînd fi dată în mod mecanic, originalitatea de gîndire pe care o pretinde matematicianul, sau logicianul, devine de prisos !

— Problema e mai complicată și cere o analiză a raportului dintre formalizare și construirea unei mașini de gîndit. Ca să se construiască un calculator capabil să înlocuiască pe matematician în rezolvarea unei probleme, sau a unei anumite clase de probleme, este necesară mai întîi posibilitatea unei formalizări complete a capitolului respectiv din matematică, ca astfel problema considerată să fie transmisă mașinii printr-un anumit cod. Dacă matematicianul a fost în stare să rezolve această formalizare și să o justifice, atunci problema poate fi rezolvată și de mașină, iar cu ajutorul codului se poate găsi soluția problemei. Însă prin această programare, matematicianului nu i se limitează aptitudinea de a rezolva problema considerată și, dacă mașina *nu va putea apia soluția*, înseamnă că nici matematicianul nu ar fi putut-o afla. Așa că, ar fi greșit să se creadă că prin soluția dată de mașină nu mai este necesară inteligența matematicianului, căci *el* este acela care a construit-o, i-a stabilit codul, a enumerat operațiile care trebuie să se succedă într-o anumită ordine și a rezolvat *problema deciziei* pentru această clasă de probleme. De altfel, prin analiza din punct de vedere logic a problemelor ce le ridică procesul de calculare, Turing și apoi alți matematicieni au aprofundat și studiul problemelor nerezolvabile, considerat din 1920 de David

Hilbert ca fiind de o importanță fundamentală în dezvoltarea logicii matematice, studiu cunoscut, cum am mai spus, sub numele de *problema deciziei*.

— în citatul din urmă, tot în legătură cu problema deciziei, era vorba și de „limitările teoremei lui Godel”. Cred că prin aceasta atingem punctul culminant al discuției noastre de azi.

— Da, stimate profesore, este o problemă care m-a emoționat adânc și nu mă lasă rece nici acum, deși a trecut de atunci o jumătate de veac.

— Ai dreptate, căci articolul lui Godel „Despre propozițiile formal nedecidabile din *Principia Mathematica* și din sistemele înrudite” a apărut în 1931. Eram tineri licențiați și continuam să urmărim revistele de matematici care veneau regulat la biblioteca Seminarului Matematic. Parcă a fost ieri și nu acum aproape 50 de ani atunci când ai venit la mine, ți-aduci aminte, dragă Toa ? Tu ai descoperit articolul lui Godel și n-ai intrat bine pe ușă când mi-ai spus : — Știi bomba ? — Bombă ? — m-am gândit eu, cine știe ce s-a întâmplat prin oraș și eu stau închis în casă și citesc romane ! M-am ridicat brusc în picioare, gata să te însoțesc, dar tu ai râs și mi-ai făcut semn să mă așez. Am stat amândoi, unul în fața altuia și tu mi-ai spus cu o voce tremurândă : — Știi, un matematician, pe nume Kurt Godel, a arătat acum câteva luni că necontradicția aritmeticii, așa cum a încercat să o stabilească Russell sau chiar Hilbert, nu se poate dovedi prin metodele finite considerate de amândoi !



Kurt Gödel

— Cum ? — m-am mirat eu și parcă dintr-odată am fost cuprins de o mare durere. Cum ? Tot ce a crezut Hilbert cu atîta ardoare a fost distrus de Godel, dintr-odată ? Nu se poate !

— Ba da, iată că se poate ! Godel arată foarte clar, în acest* articol că este imposibil să se stabilească necontra- dicția aritmeticii *dacă bazezi formalizarea pe metode finite* și dacă nu se folosesc metode de raționament mai tari decît acelea acceptate în metamatematică ! Mai mult chiar, el arată că orice sistem axiomatizat este sau incomplet, sau nedecidabil și știi cum arăta asta ? A construit el singur o propoziție formală care aparține aritmeticii și totuși nici această propoziție și nici negația ei nu face parte din sistemul formal considerat.

— Așadar, a apărut din nou fantoma cretanului ?

— Da, Godel însuși recunoaște, în introducerea articolului său, analogia dintre raționamentul său și paradoxul mincinosului și chiar cu acela a lui Richard, căci, spune el, a reușit să stabilească o propoziție care afirmă propria sa nedemonstrabilitate 1 Demonstrînd că există propoziții aritmetice adevărate care nu aparțin

grupului de axiome considerat, metamatematica lui Hilbert, care a fost construită ca să fie un instrument infailibil cînd ai de stabilit necontradicția aritmeticii, s-a dovedit, în absolutismul ei, la fel de slabă ca și logicismul lui Russell !

— Țin foarte bine minte cum am pornit amîndoi înspre Copou și ne-am plimbat ceasuri întregi, încercînd să trăim starea suflească a lui Hilbert, care ne era drag amîndurora pentru dîrzenia cu care aflasem noi, că afirmase cîndva, că „în matematici nu putem fi *ignorabimus*, fiindcă însăși natura matematicilor este să pună și să rezolve problemele”. Dar asta a fost acum 50 de ani, să lăsăm trecutul și să revenim la prezent. Spune-ne tu, Nucule, ce scrie Constance Reid despre această întâmplare.

— Atunci să citim de la pagina 198 : „Cînd Hilbert a aflat vestea de la Bernays — asistentul și colaboratorul lui— „la început a fost cam supărat”...

— Nici nu se putea altfel. Dar după aceea ?

— Ei, aici e toată frumusețea ? A înțeles și nu s-a lăsat copleșit, cum a făcut Frege cînd a aflat de antinomia lui Russell. El nu a plecat capul și nici nu a pus condeiul deoparte. Iată ce scrie Reid : „în mult ingenioasă operă a lui Godel, Hilbert a văzut că ținta către care s-au îndreptat cele mai multe dintre eforturile făcute de el de la începutul secolului — răspunsul final pe care ar fi vrut să-l dea lui Kronecker și Brouwer și altora care au vrut să restrîngă metodele matematicii — nu s-a putut realiza. Matematica trebuie să fie consistentă și, de fapt, probabil că este, dar consistența ei nu se va putea stabili niciodată prin teoria demonstrației, așa cum a sperat și a crezut el. Dar încrederea nelimitată în puterea gîndirii umane, care l-a condus în mod ferm spre ultima lui mare operă din cariera sa, l-a făcut să nu accepte emoționat rezultatul lui Godel. A considerat că descoperirea lui Godel era o verificare a ceea ce el refuzase să recunoască pînă atunci, anume că formalismul nu

avea un cadru suficient de puternic pentru greutatea pe care dorea el să o susțină. La început a fost supărat și dezamăgit, apoi a început să atace problema în mod constructiv. Pe Bernays l-a impresionat faptul că și acum, la sfârșitul carierei sale, Hilbert era în stare să facă mari schimbări în programul său".

— Dar câți ani avea pe atunci Hilbert ?

— Nu-i greu de stabilit. Dacă cercetăm indexul din cartea lui Becker putem face socoteala: în 1931, Hilbert avea 69 de ani, Bernays 43, iar Godel 25 de ani !

— Foarte interesant ! La 70 de ani să păstrezi entuziasmul din tinerețe chiar dacă un tânăr de 25 de ani te-a înfruntat cu vigoare !

— Am citit că Godel nu a stat niciodată de vorbă cu Hilbert și nici nu a fost în corespondență cu el. Dar, au mai rămas câteva rînduri interesante pe care aș vrea să le citesc. Iată cum continuă C. Reid observațiile sale : „Nu era prea clar ce influență va avea pînă la urmă lucrarea lui Godel. Godel însuși recunoștea, și a exprimat aceasta în articolul său, că lucrarea lui nu contrazicea punctul de vedere formalist al lui Hilbert, și curînd s-a dovedit că teoria demonstrației poate fi dezvoltată cu succes fără a păstra programul original. Hilbert însuși a făcut un pas în această direcție. Anume, a înlocuit schema sa de inducție completă printr-o regulă mai tare, numită „inducția transfinită". Aceasta o scrie la pagina 199. Mai departe, în pagina 217, avem continuarea : „în ciuda loviturii pe care programul lui Hilbert l-a primit (formalizarea matematicii și stabilirea consistenței printr-o demonstrație absolută) prin lucrarea lui Godel, concepția care eliberează matematica de orice contradicție a triumfat fără îndoială. „în ciuda rezultatelor mele negative", scria Godel, „schema lui Hilbert legată de fundamentele matematicii rămîne foarte interesantă și importantă". Și tot el a adăugat : „Ceea ce s-a dovedit este că obiectivul *specific epistemologic* pe

care-1 avea Hilbert în vedere nu poate fi atins. Acest obiectiv era să se dovedească consistența axiomelor matematice pe baza evidenței concrete și imediat convingătoare a aritmeticii. Cu toate acestea, privind situația din punct de vedere pur matematic, dovada consistenței bazată pe ipoteze metamatematice convenabile, mai puternice (așa cum au fost date de Gentzen și alții), sînt foarte interesante și conduc la concluzii foarte importante legate de demonstrarea teoretică a structurii matematice".

— în *Discuțiile de la Zuvich, din 1938*, despre care am mai vorbit noi, se află și o corifunicare a lui P. Bernays, intitulată „Asupra problemelor metodologice actuale ale teoriei hilbertiene a demonstrației". Sînt aici cîteva lucruri foarte interesante, dar cred că am să le arăt abia atunci cînd vom discuta despre *Intuiționism*, fiindcă referințele cu privire la acest capitol ar fi acum neacoperite.

— Bine, Bădie, numai te rog să-ți notezi, fiindcă problema formalismului merită discutată pe îndelete, adică să mai revenim la ea. De altfel, eu intenționez să mă întorc și acum, după ce ne-am ținut mai mult de povești decît de problemă, ca să o fixăm cum trebuie.

— Te aprob și cu, și cred că doctorul nostru nu se va împotrivi.

— Din contra, mie de abia după ce voi mai auzi odată anumite lucruri mi se vor lămuri cum trebuie căci, deocamdată, ceea ce am reținut este că Hilbert a fost ademenit de o iluzie pe care tînărul Godel i-a spulberat-o !

— Nu chiar de tot !

— Să zicem că nu chiar de tot ! Dar mai bine să vedem exact cum stau lucrurile !

— Iată cum începe Kurt Godel, vestitul său articol din 1931 : „Dezvoltarea matematicii în direcția unei precizări mai mari a dus, după cum se știe, la faptul că domenii largi din ea au fost formalizate astfel încît demonstrarea poate fi

efectuată după cîteva reguli mecanice., toate metodele de demonstrație folosite azi în matematică sînt formalizate, adică reduse la cîteva axiome și reguli de deducere. Puteam presupune că aceste axiome și reguli de deducere sînt suficiente pentru ca *toate* problemele care se pot exprima în general formal, să se poată și decide. În cele ce urmează. se arată că lucrurile nu stau așa și că există probleme, chiar relativ simple din teoria numerelor întregi ordinale care nu se pot decide din axiome. Această împrejurare... este adevărată pentru o clasă foarte largă de sisteme formale..." (14, p. 433)

— N-ai vrea să ne explici tu însuși, mai pe șleau ?

— Ba da, dar am crezut că așa-i mai elegant ! După cum s-a mai spus, rezultatele pe care le-a stabilit Godel sînt două. Primul arată că nu există nici o demonstrație metamatematică din care să rezulte consistența întregii aritmetici, bineînțeles formalizată, dacă se folosesc metode de demonstrație cuprinse în sistemul formalizat, dar că *această, consistență este posibilă*, dacă intervin alte reguli de demonstrație, mai largi sau mai tari.

— Stai și ia-o mai cu încetșorul ! Să admitem că avem un sistem S în care s-a formalizat întreaga aritmetică, adică au fost formalizate toate propozițiile din S , iar acestea reprezintă teoreme aritmetice și nici o propoziție din S nu reprezintă formalizarea unei teoreme false.

— Așadar, după ce orice propoziție aritmetică p din S a devenit o propoziție formală, atunci fie p , fie p este o teoremă formală din S .

— Adică înseamnă că teorema p este decidabilă !

— Întocmai. Acum Godel a construit efectiv o propoziție g care formalizează o teoremă aritmetică și a arătat că nici g și nici $\neg g$ nu sînt teoreme formale din S .

— Atunci g nu-i decidabilă ? Cu alte cuvinte, există propoziții care nu sînt teoreme, deși nu

încăpe nici o îndoială că sînt teoreme ?

— Exact; și acesta fiindcă propoziția g este despre ea însăși ! Acum să trecem la a doua concluzie a lui Godel. El a arătat că posibilitățile metodei axiomatică sînt limitate, că orice sistem în care s-ar încerca o axiomatizare a aritmeticii pe bază finită este prea restrîns ca să fie posibilă demonstrarea necontradicției ei. Așadar, dacă se fixează un sistem de axiome, din care să se dezvolte aritmetica, există propoziții aritmetice care *nu* derivă din axiomele stabilite, în aritmetică sînt, așa cum a afirmat Godel, „probleme chiar relativ simple”, care nu pot fi demonstrate ținînd seamă de axiomele existente ! Un exemplu bine cunoscut este teorema lui Goldbach, care spune că „orice număr par este suma a două numere prime”. Nimeni nu a reușit încă să stabilească o demonstrație a acestei teoreme, propusă de Goldbach lui Euler în 1742.

— în 1742 ? Adică acum aproape 240 de ani ?

— Da. Și desigur că de atunci și pînă acum s-a încercat demonstrarea ei prin diferite metode sau s-a recurs la verificări, dar totul a fost degeaba. Nici marele Euler n-a rezolvat-o, el care de fapt i-a dat problemei acest enunț, fiindcă Goldbach își întrebasese prietenul: „cum ar putea demonstra că orice număr impar, mai mare decît 5 este suma a trei numere prime” ? Pusă însă sub varianta lui Euler, problema este mai generală, iar formularea lui Goldbach apare ca o consecință a ei. Chiar și Georg Cantor s-a ocupat cu această problemă și a încercat toate numerele pare de la 2 la 1 000.

— Să luăm și noi un exemplu : $8 = 3 + 5$; $100 = 1 + 99$. Iată că 99 nu-i prim !

— Dar 100 se poate descompune în $11 + 89$, care sînt numere prime !

— Așa fiind, îmi închipui că nu a fost tocmai ușoară trebură a lui Cantor !

— Oricum, cred că nu mai grea decît să deschizi cutia craniană sau să zgîndărești măduva, dragă doctore. Și ca să vă conving, vă informez că,

după Cantor, Aubry s-a jucat, încercînd toate numerele pare dintre 1 000 și 2 000 și, ca să nu rămînă mai prejos, E. Mclet a arătat că majoritatea numerelor parc dintre 4 000 și 9 000 000 sînt sumă de două numere prime !

— Dacă s-a dus pînă la 9 000 000, înseamnă că a folosit un calculator ?

— Asta-i sigur. Cu creionul nu i-ar fi ajuns o viață de om ! Acestea toate sînt doar verificări, însă în secolul nostru s-au încercat și demonstrații, dar, după cum scrie profesorul Ion Creangă de la Universitatea noastră, în cartea lui *Introducere în teoria numerelor* (26) : „Este una dintre cele mai frumoase probleme aditive ale teoriei numerelor... care a rezistat tuturor încercărilor de demonstrație făcute pînă azi". Teorema lui Goldbach este un exemplu, marea teoremă a lui Fermat altul...

— Și, după cîte am înțeles, Godel consideră că nu-s de vină teoremele, ci insuficiența axiomelor sistemului aritmetic considerat ?



Ion L. Creangă

— Da, dar să nu mă întrebați de ce atunci nu se mai adaugă și alte axiome, căci răspunsul ar fi „oricîte axiome s-ar adăuga"... Cu alte cuvinte, axiomatizarea nu este o metodă universal valabilă,

să stabilească „odată pentru totdeauna orice problemă privind bazele matematicii”, cum afirmase odată David Hilbert. Dar de aici nu trebuie să trecem nici în cealaltă extremă și să subevaluăm meritele metodei axiomatice stabilite de Hilbert. Aș citi mai întâi ce scrie Weyl, în articolul din cartea lui Reid (22, p. 274) : „Hilbert este campionul axiomaticii. Metoda axiomatică îi părea lui că are o semnificare universală nu numai pentru matematică, ci și pentru întreaga știință... Cercetările lui în domeniul fizicii au fost concepute în spirit axiomatic, în conferințele lui i-a plăcut să ilustreze metoda prin exemple luate din biologie, economie etc. Interpretarea epistemologică modernă a științei a fost profund influențată de el. Uneori, când elogia metoda axiomatică, i se părea că ea este destinată să înlocuiască definitiv metoda constructivă sau genetică. Sînt sigur că cel puțin în ultima parte a vieții, aceasta nu mai era părerea lui... O atitudine imparțială dă dreptate ambelor părți : nu puține din cercetările moderne își datorează succesul unei fericite întrepătrunderi a procedeeleor axiomatice și genetice”.

— Mi se pare foarte interesant că, încă înainte de a apărea teorema lui Godel, Gonseth ataca metoda axiomatică, respectiv întreaga teorie a demonstrației, în cartea sa publicată în 1926. În capitolul intitulat „Teoria demonstrației a domnului Hilbert”, după ce o analizează trage următoarea concluzie : „Domnul Hilbert a atins cu adevărat scopul pe care și l-a propus și discuțiile asupra fundamentelor matematicii și ale logicii sînt ele oare definitiv închise ? Nu credem, căci prin faptul că au fost numite metamatematică, dificultățile nu au încetat să existe : ele și-au schimbat numele și poate locul, dar ele nu și-au schimbat natura. Meritul tentativei domnului Hilbert stă, din contra, în precizarea punctelor în care axiomele-formule trebuie să fie reintegrate în semnificarea lor intuitivă”.

— Dar mie mi se pare că Gonseth se referă mai mult la teoria demonstrației decît la axiomatică !

— Vă înșelați, stimate doctore, și eu trebuie să-mi asum vina căci asta dovedește că nu am fost destul de clar în cele ce v-am spus pînă acum. Formalizarea nu se poate face decît printr-o perfecționare a metodei axiomatice, căci numai așa se poate atinge un prag superior al abstracției, o eliminare din concepte și definiții a sensului intuitiv și tocmai așa a crezut Hilbert că poate salva matematica, reducînd teoriile ei la operații pur formale, cu ajutorul simbolurilor și a axiomelor corespunzătoare lor.

— Hilbert intenționa să formalizeze întreaga matematică, numită clasică, Godel a arătat că nici măcar aritmetica nu poate fi complet formalizată și aceasta fiindcă orice axiomatizare este incompletă dacă la baza ei stau considerații de ordin finit. Și, la aceste rezultate s-a mai adăugat o altă observație, de un ordin mai adînc, anume că axiomele descriu o teorie matematică, dar nu pot pătrunde în natura intimă a procesului de creație matematică !

— Totuși Hilbert nu a cedat. El era un visător entuziast, însă credea cu atîta putere în matematică și într-o armonie prestabilită a structurii ei încît, ori de cîte ori un vis i se năruia, spera să găsească o altă cale pe care să meargă mai departe.

— Asta-i cam așa : în 1900, la Congresul Internațional de la Paris a afirmat *că toate problemele pot fi rezolvate*. Cînd a înțeles că această afirmație a fost un vis, a întrezărit îndată că presupunerea lui fusese doar calea care să-l conducă spre *problema fundamentală a deciziei*. Apoi, cînd s-au arătat antinomiile și Brouwer susținea „mutilarea matematicii” el a găsit *teoria demonstrației*, visînd că prin ea „va putea înlătura în mod definitiv orice îndoială în perfecta siguranță a raționamentului matematic”.

— Cu cîtă tărie a spus el, în 1924, cînd a ținut

discursul omagial pentru Weierstrass, vorbind despre infinit: „ Situația în care ne aflăm acum cu privire la paradoxuri nu mai este de suportat. În matematică, acest model de certitudine și adevăr, definițiile și raționamentele, pe care le-a învățat fiecare, le predă și le folosește, să conducă la absurdități ? Dacă și gândirea matematică este neperfectă, atunci unde mai putem găsi adevărul și certitudinea ?" A pus această întrebare cu îndrăzneală fiindcă avea răspunsul gata pregătit în *Teoria demonstrației: metamatematica*.

— în 1934 a apărut volumul I din *Fundamentele matematicii*, la care a lucrat, împreună cu Bernays, din 1930. Am văzut reacția lui Hilbert când Bernays i-a arătat, în 1931, articolul lui Godel. A înțeles că s-a spulberat iarăși un vis, dar știa că soarta matematicii nu depindea de visul lui și a lucrat mai departe. Chiar din prefața celui de-al doilea volum al *Fundamentelor*, care a apărut în 1939, Hilbert și Bernays au recunoscut importanța rezultatelor stabilite de Godel și au arătat că ținând seama de ele a fost lărgit cadrul metodelor concrete de raționament din teoria demonstrației, cadru ce fusese legat de delimitarea punctului de vedere finit. Autorii au introdus acum metoda inducției transfinite, care nu parcurge numai șirul numerelor naturale, ci „mulțimi mai mari", bine ordonate. Din nou Hilbert a abdicat și a trebuit să recunoască astfel că necontradicția aritmeticii elementare nu mai poate fi demonstrată prin metode finitiste. Dar încrederea nu a pierdut-o. Probabil că și acum a răsunit în mintea lui o frază pe care a pronunțat-o, atunci în 1924 : „Să ne amintim că sîntem matematicieni și ca matematicieni am fost adesea în situații precare din care ne-am salvat prin metoda ingenioasă a elementelor ideale..." Căci și de data aceasta matematica a fost învingătoare. Cu sacrificii, desigur, fiindcă și completitudinea formalismului,

în sens absolut, la care a visat Hilbert, n-a fost decît un vis. în 1936 însă, tînărul lui asistent, Gerhard Gentzen, înlăturînd multe dintre presupunerile lui Hilbert și urmînd metoda inducției transfinite, a putut demonstra *necontradicția aritmeticii elementare*.

— Dar, dacă nici Hilbert nu ne-a putut oferi referințe absolut certe cu privire la fundamentele matematicii, ce ne rămîne de făcut ?

— Să vedem ce ne spun intuiționiștii ! Dar aceasta, miercurea viitoare !

VII

ALTI CUTEZĂTORI SEMEȚI

— Problema intuiționismului o vom discuta numai noi trei, fiindcă doctorul Ursu m-a anunțat că este reținut la spital de un caz urgent. El mă ruga să înregistrez pe bandă discuția de azi, ca să o poată asculta și el !

— N-are nici un haz ! Alta-i cînd discutăm între noi, așa cum ne taie capul și alta cînd am avea grijă că ni se înregistrează cuvintele ! Eu unul, n-aș putea să mă concentrez asupra subiectului fiindcă, fără să vreau aș trage cu ochiul la minunăția care și-ar învîrți roțile pe masă.

— De ce sînteți contra progresului, dragă profesore ? Pe mine m-ar interesa să aud — ca un străin — discuția dintre noi și totodată mă gîndesc la plăcerea pe care i-am face-o doctorului Ursu dacă ne-ar putea asculta.

— Tu, dacă ai poftă să te asculți, nu te împiedică nimeni să-ți pui magnetofonul pe care, după cîte am auzit, îți place să ți-1 meșteruiești, iar doctorului Ursu am să-i dau cartea lui Heyting pe care am adus-o cu mine acum (27). Ea are să-i placă și are să-1 intereseze.

— E cu totul altceva decît discuția noastră, dar, dacă dumneavoastră sînteți contra, cred că Bădia va trebui să țină seamă de părerea matală.

— Mai încape vorbă ? Am altă treabă mai bună de făcut, cred că apa de cafea clocotește de mult.

— Dacă vrei și îmi dai voie, m-aș duce să o fac eu. Cînd am sunat, mata căutai parcă niște cărți și

nu le-ai mai găsit, că ne-am apucat de vorbă !

— Ai dreptate, pînă aduci tu cafelele, le caut.

— Ce cărți vrei să aduci ?

— Două cărți strașnice ! Una este tot de Heyting, mai bine zis, editată de el, și cuprinde colocviile ținute la Amsterdam despre *Constructivitatea în matematică* (28), iar cealaltă este o carte a lui Errett Bishop care se cheamă *Fundamentarea analizei constructive*. (29)

— înseamnă că azi vom avea ceva de furcă ! îmi pare rău că nu vine și doctorul Ursu, care ne era un bun stimulent ! Dar din cartea ce am adus-o eu, se va lămuri destul de bine și apoi dacă nu înțelege ceva, ne poate pune întrebări ! Dar văd că Nucu a și adus cafelele ! Am să-ți fac un compliment, băiete, un compliment pe care așa de puțini știu să-l aprecieze la justa lui valoare ! Tu ai acum vîrsta ■ cea mai frumoasă, vîrsta pe care a avut-o Godel cînd a scris articolul acela fulminant, vîrsta pe care a avut-o Brouwer cînd a împuns cu coarnele, așa de unul singur, în toată mulțimea celor *mari*, fără să se sinchisească dacă se numea Cantor sau Zermelo, Peano sau Russell, ori Hilbert. A izbit cu putere în toți și în toate ideile lor, nu din joacă, ci în numele *intuiționismului* !

— Numai că, fiind tînăr, la început nu s-a făcut prea mare caz de toată agitația lui. Cei mai mulți dintre matematicieni au privit-o ca pe o zbenguială pe care numai tinerețea și-o poate permite !

— Aici are dreptate, Bădia. Care matematician cu prestanță și cu scaun la cap ar fi dat dreptate unui tinerel care-i strigă-n față, pe nerăsuflate, că matematica este o activitate autonomă a spiritului, că are un caracter sintetic care nu are nevoie să fie motivată nici de logică, nici de formalism, ci, pur și simplu, *prin construcțiile evidente și intuitive* ale obiectelor ei ? Că logica, cu legile ei clasice formulate de Aristotel și acceptate de toți matematicienii de 2 000 de ani încoace, nu are o valoare absolută, fiindcă nu legile ei fac ca o demonstrație să fie concludentă, ci numai *evidența*

imediată, care-și are izvorul în intuiție ! Nu-1 priveau, oare, ca pe un copil care bate din picioare și din pumni strigînd : „sîc, sîc, sîc, că eu am dreptate !" ?

—Totuși, Nucule, sub amenințarea celor două antinomii, aceea a lui Burali-Forti, provocată de teoria mulțimilor și aceea a lui Russell, privind logicismul a fost și el tulburat ca și toți cei ce se interesau de fundamentele matematicii. Soluția pe care a întrezărit-o i-a părut cea mai indicată și tinerețea lui i-a dat curajul să se sumețască. Citise *Critica rațiunii pure*, acceptase că „judecățile matematice sînt toate sintetice și bazate pe intuiție" și a tresărit de bucurie cînd a regăsit părerea, susținută și de Poincare care o completa, afirmînd că „raționamentul matematic are, prin el însuși, un fel de virtute creatoare și prin aceasta se deosebește de silogism". Nici părerile lui Kronecker nu l-au lăsat indiferent, ci le-a luat ca punct de plecare și i-au stimulat imaginația. Căci Kronecker socotea că *opera omului* poate avea pecetea perfecțiunii, numai dacă „toate rezultatele cercetărilor matematice, oricît de profunde ar fi ele, s-ar putea exprima, în cele din urmă, sub forma simplă a proprietăților numerelor întregi". Cumpănind astfel părerile diferiților matematicieni și filosofi, s-a simțit atras mai mult de Kant decît de Leibniz, mai mult de Kronecker și Poincare decît de Dedekind și Cantor, Russell sau Hilbert. De aceea, în 1907, atunci cînd și-a susținut la Universitatea din Amsterdam teza lui de doctorat, în care se ocupa de fundamentele matematicii, a atacat cu energie atît teoria mulțimilor, cît și logica lui Peano și Russell sau formalismul și axiomatizarea lui Hilbert. Pe toate le-a analizat pe rînd, dovedind că sînt *inconsistente* din punct de vedere intuiționist. Chiar el a inventat denumirea de *intuiționism* ca să se exprime, prin acest termen că matematica este identică cu partea exactă din gîndirea noastră care e bazată pe intuiția primară a șirului numerelor naturale și că, din cauza

imperfecțiunii limbajului nostru, ea nu poate fi tradusă fără mutilare într-un sistem formal.

— Și care a fost reacția comisiei de doctorat, stimate profesore ? A acceptat, poate, să le bată și cu pumnul în masă ?

— Nu știu, că n-am fost de față, dar judecînd după dîrzenia cu care a discutat mai tîrziu cu Hilbert, n-ar fi fost imposibil să o fi făcut ! Dar nu cred că s-a ajuns pînă acolo, fiindcă membrii comisiei trebuie să-1 fi privit cu îngăduință atunci cînd el afirma, cu seriozitate, că matematica a pierdut contactul cu realitatea gîndirii și că singura cale de a o recîștiga ar fi să devină intuitivă și constructivă și, în acest scop, se impune să se renunțe la întreaga teorie a mulțimilor infinite pentru care nu este valabil principiul terțiului exclus și să nu se accepte decît mulțimile finite și cel mult pe acelea numărabile.

— Și totuși, părerile lui au prins ! E de ajuns să-1 amintim pe Weyl, care i-a amărît sufletul lui Hilbert cu articolele publicate de el, prin care recunoștea valabilitatea intuiționismului !

— Asta a fost mai tîrziu, Bădie ! Dar la început, mă gîndesc îndată după 1907, nimeni nu s-a speriat de atacurile celor cîțiva intuiționiști care s-au grupat în jurul lui Brouwer, și matematicienii nu s-au grăbit să se lepede de concepțiile lor ca să le adopte pe ale intuiționiștilor ; cel mult unii dintre ei au căutat să-și precizeze, într-o formă mai clară, propriile lor convingeri. Nu-ți aduci mata aminte ce a spus Hans Lewy cînd a venit Brouwer la Göttingen și a expus concepțiile sale ? : — „Pînă ce Brouwer nu va stabili o contradicție în matematica noastră clasică, nimeni nu-i obligat să-l asculte". De aceea, Brouwer a trebuit să scrie, și iar să scrie, ca să-și repete convingerile sale. Iată ce spunea într-un articol, apărut în 1919, sub titlul: „Teoria intuiționistă a mulțimilor" :

„Începînd din 1907, în mai multe scrieri de teorie a mulțimilor și de filosofie am apărut următoarele două teze :

1. Că *axioma comprehensiunii* pe baza căreia se pot reuni într-o mulțime toate lucrurile care posedă o anumită însușire este inacceptabilă pentru fundamentarea teoriei mulțimilor, respectiv este inutilizabilă (chiar și în forma mai mărginită dată de Zermelo) și că matematica trebuie să aibă la bază o definiție constructivă a mulțimilor ;

2. Că axioma formulată de Hilbert în 1900 despre rezolvabilitatea oricărei probleme este echivalentă cu principiul logic al terțiului exclus ; prin urmare, deoarece pentru această axiomă nu există nici o rațiune suficientă, iar logica are la bază matematica și nu invers, principiul logic al terțiului exclus este un mijloc nepermis în demonstrația matematică, căreia nu i se poate atribui decât valoare scolastică și euristică, astfel încât teoremele în a căror demonstrație nu se poate evita aplicarea sa sînt lipsite de orice conținut matematic".

Nefiind convins că și-a exprimat destul de clar părerile, la acestea mai adaugă și următorul subsol: „După convingerea mea, atît axioma rezolvabilității, cît și principiul terțiului exclus sînt false și credința în ele a fost generată istoricește prin faptul că mai întîi în matematica submulțimilor unei *mulțimi finite determinate* s-a abstras logica clasică, apoi acestei logici i s-a atribuit o existență apriori independentă de matematică și, în sfîrșit, această logică, pe baza pretinsei apriorități, în mod nejust a fost aplicată la matematica *mulțimilor infinite*". (14, p. 361)

— Si, după cum știm, Brouwer a avut dreptate, iar Hilbert a trebuit să prefacă axioma rezolvabilității în problema deciziei !

— Eu aș vrea să observ că între formalism și intuiționism există o punte de legătură, dar nici unul, nici altul nu au vrut să o treacă. Doar atît Hilbert cît și Brouwer erau de partea lui Kant și nu acceptau că propozițiile matematice ar fi *analitice*, așadar, demonstrabile numai pe cale logică ; totuși, altfel vedea Hilbert caracterul sintetic al

propozițiilor, și altfel Brouwer. Am citit, nu mai știu unde, că Brouwer ar fi spus : „pentru formalist adevărul matematic este pe hîrtie, iar pentru intuiționist, în mintea matematicianului”.

— O observație cît se poate de întemeiată căci dacă Brouwer consideră propozițiile aritmeticii și ale geometriei ca *sintetice a priori*, pentru Hilbert, caracterul lor sintetic este pus în evidență prin metamatematică. Discuțiile dintre Brouwer și Hilbert rămîn prezente prin articolele ce apar, de o parte și de alta. La *Fundamentele matematicii*, pe care am văzut că le-a publicat Hilbert în 1928, în care am găsit și o săgeată îndreptată înspre Brouwer, i se opune articolul lui Brouwer din același an, intitulat „Considerații intuiționiste asupra formalismului”, în care nici Brouwer nu se lasă mai prejos și îndreaptă nu una, ci patru săgeți către Hilbert : „Deosebiri relative la validitatea dintre noua fundamentare formalistă și noua construcție intuiționistă a matematicii vor fi înlăturate și alegerea dintre cele două activități se va reduce la o chestiune de gust îndată ce următoarele idei, referitoare în primul rînd la formalism, dar formulate mai întîi în literatura intuiționistă, vor reuși să se impună în general. Acest lucru este numai o chestiune de timp, pentru că este vorba de pure rezultate ale reflecției, care nu conțin nici un element discutabil și pe care orice om care le-a înțeles odată trebuie să le ia ca un *credo*. Dintre cele patru idei, pînă acum numai două și-au atras în literatura formalistă înțelegerea și recunoașterea. Cînd și celelalte două vor fi în aceeași situație, acesta va însemna sfîrșitul polemicii fundamentelor în matematică”. (14, p. 365)

— N-am ce spune, foarte dîrz ! Parcă încep să-i dau dreptate biografei lui Hilbert, care scria: „în contrast cu Weyl, Brouwer a devenit, ca și Kronecker un fanatic în serviciul cauzei sale. El îl privea pe Hilbert „ca inamicul lui”. Cînd am citit acele rînduri, credeam că-s exagerate ; acum văd

că nu-s !

— Mă bucură, Bădie, că-mi dai dreptate ! Mai bine mai târziu decît niciodată. Aşa că, nefiind de glumit cu domnul Brouwer, propun să ne apropiem cu precauție şi cu multă atenție de intuiționism.

— De acord. Şi cred că cel mai expeditiv mijloc ar fi să începem cu cartea lui Heyting, *Introducere în Intuiționism*, pe care am adus-o, întrucît mi-a plăcut foarte mult.

— Ideea nu-i rea, ba chiar foarte bună, fiindcă această carte a avut mult succes.

— Cred şi eu, altfel crezi că aş fi comandat-o ? Heyting a fost elevul lui Brouwer, apoi a devenit colegul lui la Universitatea din Amsterdam, colaboratorul şi, aş spune, popularizatorul operei lui Brouwer, deşi cuvîntul nu-i tocmai potrivit, fiindcă aici nu-i vorba de popularizare, ci de o prezentare, într-o formă desăvîrşită şi mai uşor de înţeles decît din lucrările lui Brouwer a intuiționismului. Arend Heyting şi-a susţinut, în 1925, teza de doctorat, tot la Universitatea din Amsterdam, ca şi Brouwer, avînd ca subiect „Despre axiomatizarea matematicii intuiționiste”. Am răsfoit de mai multe ori cartea aceasta, apărută în 1956 şi mi-a plăcut faptul că problema intuiționismului este prezentată sub forma unor discuții, între mai multe persoane.

— Procedetul dialogului a fost folosit de multe ori, de pildă de Platon sau, în timpurile mai apropiate de noi, de Galileu.

— Personajele lui Heyting au însă o identitate aparte. Autorul spune : „ele sînt cîrlige de atîrnat idei” şi de aceea se şi numesc : *Class, Form, Int, Prag....*

— Adică o prescurtare a numirilor : *clasicism, formalism, intuiționism, pragmatism* etc. ?

— Desigur, în felul acesta fiecare personaj îşi expune propria sa teorie ! Şi mai mult, în cele 8 capitole ale cărții se prezintă, pe rînd, metoda intuiționistă aplicată în diferite domenii : aritmetică, algebră, analiză, logică şi, de asemeni,

punctul de vedere intuiționist în alte probleme, care nu intră în discuția noastră. Primul capitol, intitulat „Discuție”, pune problema intuiționismului.

— N-ai vrea să citim ceva din el ?

— Am să încerc. După câteva fraze introductive, *Int* spune : „Părerea că pentru a descrie un anumit fel de obiecte ar fi mai potrivită altă logică decât cea obișnuită a fost deseori discutată. Dar Brouwer este primul care a descoperit un obiect care cere acum o altă formă de logică, anume construcția matematică mintală (L.E.J. Brouwer, 1908). Pricina este că în matematică am avut de-a face întotdeauna cu infinitul, iar logica obișnuită a fost făcută pentru raționamentele privind mulțimile finite”. La obiecția făcută de *Class*, că logica este universală și se aplică atît la problemele infinite, cît și la cele finite, *Int* îi prezintă programul lui Brouwer din 1907 : „El constă în investigarea construcțiilor matematice mintale ca atare, fără referințe la întrebări privind natura obiectelor construite, ca și cum ele ar exista independent de cunoașterea noastră despre ele. Că acest punct de vedere conduce la excluderea principiului terțiului exclus, se poate demonstra printr-un exemplu : Să comparăm două definiții ale numerelor naturale pe care să le numim k și l .

1. k este cel mai mare număr prim așa fel ca numărul $(k-1)$ să fie de asemenea prim, sau $k=1$, dacă un asemenea număr nu există.

2. l este cel mai mare număr prim așa fel că $(l-2)$ să fie de asemenea prim, sau $l=1$, dacă un asemenea număr nu există.

În matematica obișnuită, clasică, nu se ține seamă de deosebirea esențială dintre aceste două definiții, k poate fi calculat ($k=3$), pe cînd pentru calcularea lui l nu există nici o metodă, pentru că nu se cunoaște dacă șirul perechilor de numere prime p și $(p-2)$ este finit sau infinit”.

— În adevăr, există un singur număr prim $A=3$ astfel încît $3-1=2$, este tot un număr prim. E singurul, căci din oricare alt număr prim am scădea

pe 1, se obține un număr pereche, adică neprim. Din contra, în cazul al doilea există multe perechi ce satisfac condiția dată : $5-2 = 3$, $7-2=5$, $13-2 = 11$,... avem așadar șirul de perechi (3,5), (5,7), (11, 13) ... despre care nu putem afirma dacă este finit sau infinit.

— Tocmai de aceea. *Ini* nu admite că a doua condiție poate defini un număr întreg. El spune că intuiționiștii „consideră că un întreg poate fi bine definit numai dacă există o metodă prin care să poată fi calculat. Acest mod de gândire conduce ,la excluderea principiului terțiului exclus pentru că, dacă șirul perechilor prime este finit sau infinit, condiția 2 va defini un întreg”.

— Așa-i, căci în acest caz nu există numai două posibilități, dintre care să putem afirma cu precizie pe care o alegem : însă *Class* respinge afirmația lui *Ini* și pretinde că și în a doua condiție definiția lui este la fel de bine precizată căci, dacă perechile de numere prime sînt infinite, atunci se consideră $Z=1$, iar dacă numărul lor este finit, 1 este cel mai mare dintre aceste perechi astfel că $1-2$, să fie prim. Ce importanță are, dacă acest număr poate fi calculat efectiv, sau nu ?” adaugă el, la care *Int* replică : „Argumentul adus este de natură metafizică. Dacă *a exista* nu înseamnă *a fi construibil*, atunci aceasta trebuie să aibă un sens metafizic. Și nu poate fi sarcina matematicianului să cerceteze acest înțeles sau să decidă dacă el este acceptabil sau nu. Nu avem nici o obiecțiune contra unui matematician care vrea să admită, în particular, orice teorie metafizică ce îi place, dar în programul lui Brouwer se consideră că noi studiem matematica într-un fel mai simplu și mai imediat decît metafizica. În studiul construcțiilor matematice mintale, *există* trebuie să fie sinonim cu *a fi construibil*. *Class* : Altfel spus, atîta vreme cît nu știm că există o ultimă pereche de numere prime, condiția 2 nu. este o definiție a unui întreg, dar imediat ce problema, a fost rezolvată, condiția 2 devine dintr-o dată o definiție. Să presupunem că la 1 ianuarie

1970 (cartea a apărut în 1956) s-a putut dovedi că există o infinitate de perechi prime, din acel moment $Z=1$. Înainte de această dată nu a fost ?" (Menger, 1930).

— Mi se pare că *Int* se află în impas ! Cum se descurcă ?

— Foarte simplu. El amintește că pentru intuïtionist o propoziție matematică afirmă faptul că o anumită construcție matematică a fost executată. Înainte ca această construcție să fi fost executată, ea nu exista. Înainte de 1 ianuarie 1970 nu se dovedise că $Z=1$. Dar nu aceasta este ce ai gândit, adaugă el ! „Mi se pare că pentru a clarifica sensul întrebării puse, trebuie să ne referim din nou la noțiuni metafizice : la o anumită lume de lucruri matematice care ar exista independent de cunoașterea noastră, unde $I=1$ este adevărat într-un anume sens absolut. Dar, repet că matematica nu trebuie să depindă de asemenea noțiuni".

— Bine, dar aceasta este veșnica, veche și nouă dilemă : sînt adevărurile matematice *descoperite* sau *inventate* ? Încă de pe vremea lui Platon, unii matematicieni credeau că adevărurile matematice există în lume independent de cunoașterea lor de către om, că ele reprezintă niște adevăruri absolute, iar treaba matematicianului este să le descopere. Acești matematicieni consideră că ei descoperă o parte din realitate : pentru ei, de pildă, teoremele din teoria numerelor naturale sînt descoperiri tot așa cum sînt și descoperirile fenomenelor fizice de către fizicieni sau descoperirea planetelor de către astronomi. Alți matematicieni, din contra, consideră că sarcina matematicianului este să *inventeze* și să *creeze matematica*, nu să o descopere. De pildă, Kronecker.

— De altfel, chiar și matematicienii care cred că matematica este descoperită trebuie să admită că și în domeniul numerelor întregi există capitole care au fost *inventate* de om, și nu descoperite. De pildă, noțiunea numărului *zero* a fost inventată de

hinduși și nu descoperită, la fel sistemul zecimal. Aceste două invenții au contribuit mult la progresul și dezvoltarea tehnicii.

— După răspunsul pe care un matematician îl dă la întrebarea dacă matematica a fost descoperită sau inventată, el se încadrează în unul sau altul dintre curentele pe care le-am discutat și le discutăm. Logisticienii, de pildă, consideră că matematica se descoperă, intuiționiștii că este inventată. De aceea, intuiționiștii pretind că dovada *existenței* unui obiect matematic se face prin *construirea lui*, iar acest fapt a făcut ca în loc de *matematică intuiționistă* să se folosească și denumirea de *matematică constructivă*.

— Dacă ne reîntoarcem la cartea lui Heyting, ca să mai urmărim discuția la care am asistat, îl găsim pe *Int* spunând: „Matematica intuiționistă constă în construcții mintale ; o teoremă matematică exprimă un fapt pur empiric, anume succesul unei anumite construcții. „ $2 \cdot 4 - 2 = 3 \cdot 4 - 1$ ” trebuie să fie citită ca o prescurtare a propoziției : „Am efectuat construcția mentală indicată de „ $2 \cdot 4 - 2$ ” și de la „ $3 \cdot 4 - 1$ ” și am găsit că ele duc la același rezultat”.

— Dați-mi voie, dragă profesore, să vă întrerup, căci mi-am adus aminte de un frumos exemplu pe care l-am citit în cartea lui Beth (7, p. 158), de unde metoda intuiționistă de gândire apare, parcă, mai amplu conturată și completează astfel exemplul dat de Heyting. Anume, e vorba de discuția unei ecuații algebrice de gradul întâi cu o singură necunoscută : $ax^4 - 6 = 0$.

În algebra elementară se consideră cele trei cazuri :

1. $a \neq 0$, în acest caz $x = b/a$ este rădăcina ecuației și ea e singura valoare posibilă a lui x care satisface ecuația.

2. $a = 0$, $6 \neq 0$; nici o valoare a lui x nu satisface ecuația.

3. $a = 0$, $6 = 0$; orice valoare a lui x verifică ecuația.

Din punct de vedere *intuiționist*, lucrurile nu se

prezintă așa de simplu.

Să presupunem că a este definit astfel : Dacă n este cel mai mic număr natural k , astfel încât zecimala de ordinul k din expresia $(\kappa - \tau - e)^{n-1}$ să fie primul termen dintr-o serie de 100 de cifre egale, atunci « $= (-1/10)^0$ » și dacă nu există numărul k astfel definit, atunci « $= 0$ ». Numărul 6 se definește într-un mod asemănător, anume dacă n este cel mai mic număr natural, k astfel încât zecimala de ordinul k din expresia numerică $(tc - e)^{rt + e}$ să fie primul termen dintr-o serie de 100 cifre egale, atunci $6 = (-1/10)^n$, și dacă un asemenea număr nu există atunci $6 = 0$. Cum rezolvăm problema în acest caz ? Putem ști în care din cele trei situații ne aflăm, adică putem aplica principiul terțiului exclus ? Nu ! Există deci un al patrulea caz, de care algebra clasică nu ține seamă, care ne arată, pe de o parte că nu toate problemele pot fi rezolvate și, pe de alta, că există o limită pînă la care se poate aplica principiul terțiului exclus.

— în adevăr, ai găsit un foarte interesant exemplu de construcție mintală, pe care o aduce în discuție intuiționismul ! Eu am să folosesc prilejul ca să atragă atenția asupra unei comunicări făcută de Heyting, care se află în această carte tipărită de el: *Constructivity in Mathematics* (28, p. 69), anume, ei observă că trebuie să se facă deosebire între: a) o teorie a constructibilului și b) o teorie constructivă, arătînd că : „într-o teorie a constructibilului se definește o anumită clasă de obiecte matematice ca fiind obiecte constructibile. în acest caz, trei puncte sînt esențiale : 1) Se presupune că există o teorie matematică în care poate fi definită clasa obiectelor constructibile ; 2) Noțiunea de constructibilitate este o noțiune definită și nu o noțiune primitivă ; 3) Există o anumită libertate în alegerea unei definiții a constructibilului, cu condiția, numai, ca să corespundă în mod suficient cu noțiunea noastră intuitivă despre o construcție matematică. Printr-o teorie constructivă înțeleg o teorie în care un

obiect este considerat că există, numai după ce a fost construit. Cu alte cuvinte, într-o serie constructivă nici nu pot fi menționate altfel de obiecte decît constructibile. Personal, eu sînt atras de matematica constructivă, căci sînt incapabil să dau un sens inteligibil afirmației că există un obiect matematic care nu a fost construit... Cerința ca să fie considerate sau menționate numai obiectele constructibile este suficientă ca să explice particularitățile matematice intuiționiste. Din faptul că numai obiectele construibile sînt considerate că există urmează că ele nu formează o subclasă a clasei tuturor obiectelor matematice. În teoria constructivă nu există referințe la un sistem matematic precedent... Noțiunea de obiect constructibil trebuie să fie o noțiune primitivă în sensul că trebuie să fie clar ce înseamnă că o anumită operație arată construcția unui anumit obiect".

— Însă dacă ni se spunea *ce se înțelege* printr-o *teorie constructivă*, asta nu înseamnă și că ea *a fost definită* !

— Desigur că nu, și nici nu se încearcă aceasta, fiindcă în *altă conferință* din aceeași carte se arată că orice încercare de *a defini noțiunea de teorie constructivă* duce la *un cerc vicios*, pentru că definiția însăși conține un cuantificator existențial, care, la rîndul lui, trebuie interpretat în mod constructiv !

— Iată o lecție bine învățată de intuiționiști. Dar despre intuiționism St. Korner mai are multe să ne învețe. De pildă (13, p. 160), iată ce ne spune despre program din punct de vedere al filosofiei matematice : După părerea lui Brouwer, „matematica practică de preintuiționiști și formalști consta din două părți separate — o matematică autonomă, și o matematică a cărei certitudine depindea de limbaj și logică. Pentru matematica autonomă, *existența exactă, certitudinea absolută și necontradicția erau universal recunoscute, independent de limbaj și*

fără demonstrație. Ea îmbrățișa teoria elementară a numerelor naturale/principiul inducției complete și părți mai mult sau mai puțin considerabile din algebră și teoria numerelor. Matematica neautonomă îmbrățișa teoria continuului numerelor reale... Tezele fundamentale ale filosofiei intuiționiste a matematicii sînt clar formulate de Brouwer. El le descrie ca două acte prin care intuiționismul a intervenit în situația creată de predecesorii săi și de formalisti... Cel mai nimerit este să cităm aici pe larg din lucrarea sa: „Primul act de intuiționism separă complet matematica de limbajul matematic, în particular de fenomenele de limbaj descrise de logica teoretică, și recunoaște că matematica intuiționistă este o activitate a minții, esențialmente independentă de limbaj.



Luitzen Egbertus Jan Brouwer

... După cum experiența, să zicem, a ascensiunii unui munte nu trebuie confundată cu descrierea și comunicarea ei lingvistică pentru alții, tot astfel experiența intuițiilor și construcțiilor matematice nu trebuie confundată cu descrierea și comunicarea sa lingvistică... După Brouwer, principiile logice clasice sînt reguli lingvistice prin faptul că cei care le *respectă din punct de vedere*

lingvistic pot — dar nu este necesar — *să fie conduși de experiență...* Matematica în esență este independentă, în acest sens, nu numai față de limbaj, dar și față de logică".

— Faptul îl repetă și Heyting într-o conferință (9, p. 16) : „Noi nu putem rămâne indiferenți față de tendințele totalitare ale mișcării pentru unitatea științei. Ceea ce ne separă de adepții acestei școli este aprecierea rolului limbii. Noi susținem că misiunea științei nu constă în studiul limbilor și nici în aceea a ideilor pe care limba încearcă să le exprime, ci în creația acestor idei însăși".

— Cu alte cuvinte, cum am mai spus, intuiționiștii consideră matematica drept o funcție naturală a intelectului, o activitate autonomă a gândirii, liberă și suficientă sieși, și, în această calitate, ea își dă contribuția în orice alt sector al activității omenești : știință, filosofie, logică sau în domeniul practic. Și tocmai această *autonomie* a ei o face să fie independentă de logică, numai logica depinde de matematică. De aceea, intuiționistul nu face mare haz de logică și are pretenția că logica să se separe de matematică, motivînd că aceste două obiecte sînt legate doar prin limbajul matematic, care însoțește construcțiile logistice !

— Fiindcă-i vorba de limbaj, mi-am amintit și mă întorc iar la Hilbert. Prea dură îmi pare caracterizarea pe care o face Brouwer axiomatizării lui Hilbert : „un monument verbal", fără nici o interpretare matematică, căci axiomele lui nu mai corespund punctului de vedere euclidian ! El nu mai definește punctul, dreapta etc. în mod constructiv, ci le enunță numai proprietățile fundamentale. Cît despre formalism, deși Brouwer constată că există anumite asemănări între punctul de vedere finitist din metamatematica lui Hilbert și tezele finitiste ale intuiționismului, deosebiriile dintre ele sînt esențiale. O arată și Bernays, în articolul ce l-am amintit data trecută : „Asupra chestiunilor de metodologie actuală ale teoriei hilbertiene a demonstrației". Am amînat discuția lui

pe azi, cînd ne ocupăm de intuiționism, fiindcă și Bernays face trimiteri la intuiționism, deși se ocupă de modificările impuse teoriei demonstrației, ca urmare a teoremei lui Godel. „î n termeni tehnici”, spune Bernays, „e vorba de următoarele : pentru raționamentele metamatematice trebuie mijloace mai tari decît acelea la care a intenționat să se restrîngă Hilbert, în sensul gîndirii finite. Necesitatea unei asemenea lărgiri a metodei apăruse chiar de la problema — care se considera clarificată — a necontradicției formalismului aritmetic integral. Cu această ocazie s-a revelat că punctul de vedere finitist al lui Hilbert nu este echivalent, cum a apărut la început, cu punctul de vedere intuiționist al lui Brouwer, Godel a putut arăta că, în domeniul teoriei numerelor întregi, toate raționamentele clasice se pot transforma în raționamente admise de intuiționism, cu ajutorul unei interpretări relativ simple. Astfel deci, necontradicția teoriei numerelor întregi rezultă fără nici o greutate din punctul de vedere intuiționist, prin intermediul acestei interpretări...

Totuși, în domeniul raționamentelor care se reprezintă prin formalismul aritmetic, acordul se poate stabili între partizanii matematicii clasice, care consideră toate aceste raționamente ca legitime și intuiționiștii care nu recunosc principiul terțiului exclus ca fiind general... Constatarea unui raport așa de intim între raționamentele aritmeticii intuiționiste și acelea ale aritmeticii clasice permite mai întîi să tragem concluzia imediată asupra necontradicției formalismului aritmetic obișnuit din punct de vedere intuiționist. Se vede în același timp că există o deosebire esențială între punctele de vedere intuiționist și finitist". (9, p. 144) Mă opresc aici căci nouă ne ajung aceste informații generale, nu-i cazul să intrăm în amănunte. Poate că ne spune Nucu și ceva despre aspectul intuiționist al teoriei mulțimilor.

— Brouwer a criticat teoria mulțimilor, așa cum a fost introdusă de Cantor, atît din cauza *definiției*

naive a mulțimii, cât și pentru că a introdus *infinitul actual*, care a dus la aplicarea fără discernământ a principiului terțiului exclus. Prin infinitul actual, *mărime absurdă* fiindcă nu există în natură și depășește toate limitele, spunea Brouwer, Cantor a definit *numărul cardinal transfinit*, care nu poate fi intuit, fiind mai mare decât toate numerele cardinale finite. Brouwer a dat noțiunii de mulțime un sens mult mai restrictiv decât acela propus de Cantor. În felul acesta, el a putut evita expresiile neconstructibile, ca, de exemplu, aceea de „mulțimea tuturor mulțimilor” etc.

— Da, știu, el a introdus două noțiuni noi, specifice intuiționismului, aceea de *extindere* și aceea de *specie*. *Extinderea* este modul constructiv de a genera elementele unei mulțimi. Mulțimea se prezintă ca un *șir* care înaintează mereu, spre infinit, termenii șirului fiind determinați de o anumită lege. Iar proprietatea caracteristică a elementelor din mulțimea ce s-a construit este *specia*. Astfel este înlăturată antinomia mulțimii tuturor mulțimilor.

— Nici nu ar mai avea cum să existe, fiindcă mulțimile au devenit *infinat potențiale* și, în acest caz, lor li se poate aplica principiul terțiului exclus fără nici o restricție. Numai în cazul mulțimilor actual infinite, spunea Brouwer, pe lângă posibilitățile : A și $\text{non } A$ există încă o a treia, care nu poate fi exclusă, după care continuă : „Există o matematică a infinitului potențial... care constituie un fundament intuitiv solid pentru o nouă analiză și deschide un câmp de dezvoltare care *în multe locuri depășește cu mult granițele matematicii clasice*”. Pornind de la aceste observații. Șt. Korner trage concluzia că „domeniul unei noi matematici autonome a infinitului potențial se deschide prin *al doilea act de intuiționism*, care recunoaște posibilitatea de a genera noi entități matematice : mai întâi în forma de succesiuni neîntrerupte $p^{\wedge}, p_2...$ ai căror termeni sînt aleși în chip mai mult sau mai puțin liber dintre entitățile matematice obținute

deja, astfel încheie libertatea de alegere, existență pentru primul termen p_{lt} poate fi supusă unei restricții durabile în cazul unui termen următor Pr

— Da, asta-i *extinderea* și *specia* care era logic să fie introduse, pentru ca astfel intuiționismul să poată accepta mulțimile infinite.

— Este, dar Korner spune și ceva mai mult în privința logicii pe care ai invocat-o ca argument : „Intuiționistul nu se ocupă cu logica în general, ci numai cu logica matematicii, adică *logica matematică*, nu cu sensul de logică generală matematizată, ci de formulare de principii întrebuate în activitatea de construcție matematică”.

— Admițând, odată cu Brouwer, că activitatea matematică are un caracter creator, specific constructiv înțelegem de ce el a fost obligat să-și creeze un instrument propriu, o *logică, intuiționistă*.

— Aveți dreptate, stimate profesore, și de aceea chiar primele studii de logică intuiționistă au fost făcute de Brouwer. El a pus în evidență faptul că logica trebuie să se adapteze necesităților gândirii matematice intuiționiste, căci matematica intuiționistă este complet independentă de logică. Apoi, aceste rezultate au fost continuate de Heyting, care are și meritul de a fi formalizat primul logica intuiționistă. Și, în acest scop, el a folosit notațiile logicii simbolice din *Principia mathematica*.

— Îmi place că intuiționiștii s-au dat la brazdă și au început să cocheteze când cu formalismul, când cu logicismul...

— Exagerați, stimate profesore ! Logica matematică este privită de intuiționiști după cum am mai spus, numai ca *instrumentul* prin care își formulează *principiile* pe care le urmează în construcțiile sale matematice. După cum știm, căci am discutat-o de mai multe ori, logica obișnuită se bazează pe principiul contradicției și al terțiului exclus, care spune că afirmațiile A și $\neg A$ nu pot exista amândouă deodată : dacă una este adevărată,

cealaltă este falsă. Logica intuiționistă, din contra, este construită pe concepția că numai *principiul contradicției este valabil întotdeauna*, pe când *principiul terțiului exclus se aplică numai în anumite cazuri*. Ea admite că propozițiile sale sînt susceptibile de trei valori : adică sînt *fie adevărate, fie false*, fie astfel că, *deși nu-s false, adevărul lor nu se poate dovedi*. în felul acesta, principiul terțiului exclus nu mai apare ca un caz particular al disjuncției A sau $B(A \vee B)$ în care $B = A$, de unde rezultă A sau $A : (A \vee A)$. în logica intuiționistă înțelesul negației unei propoziții nu-i bine determinat și este cu totul deosebit de acela pe care îl are în vorbirea de toate zilele. De aceea, Heyting a și introdus un semn nou pentru negație ("|"), care să o deosebească de negația din logica simbolică obișnuită.

— Să vedem mai îndeaproape, cum ar veni asta : O propoziție A se spune că este adevărată din punct de vedere intuiționist dacă *se poate construi efectiv*, construcția fiind dovada de netăgăduit a adevărului propoziției A . însă propoziția $\sim IA$ poate fi afirmată numai și numai dacă *se poate stabili o altă construcție care să ducă la contradicție*, în ipoteza că A a fost construit ! Prin urmare, în logica intuiționistă, principiul terțiului exclus: $A \vee \sim IA$ nu este adevărat decît atunci cînd există o construcție a lui $\sim IA$, care să stabilească absurditatea lui A , adică faptul că propoziția A duce la o contradicție.

— Și, în cazul mulțimilor infinite, cum stabilești că este absurd că A nu-i adevărat, dacă nu-1 poți construi ? Absurditatea absurdității nu implică adevărul, pe cînd *adevărul implică absurditatea absurdității*" a spus Brouwer, înțelegînd prin „absurditatea absurdității" tocmai acest caz deosebit cînd nu se poate afirma nici adevărul și nici falsitatea.

— Hai să ne jucăm și să transcriem în mod formal că adevărul implică absurditatea absurdității (de ex. : imposibilitatea lui $af=b$ înseamnă $a = b$).

— Bine, Bădie, nu-i mare lucru: (j-A-+ ~n A). După cum vezi, am pus și |-.

— Văd eu că ai pus tu și *semnul de aserțiune*, dar totuși, mie îmi pare că negația asta intuiționistă îi cam buclucașă ! "I-d înseamnă că am efectuat o construcție *B*, care arată o contradicție în presupunerea că aş putea găsi mintal sau aş putea efectua construcția *A*. Dar ceea ce se aplică propoziției $\sim I A$ trebuie să se aplice și propoziției $\sim I \sim I A$, deoarece TU nu implică adevărul, adică pe *A*. Or, de aici rezultă că nici o experiență care se exprimă prin negație intuiționistă nu-i evidentă în sine.

— Are dreptate Bădia, dragă Nucule. La pagina 120 din cartea din care am citit, Heyting vorbește despre „Matematica intuiționistă fără negație”, concepută de Griss, care a reușit să stabilească unele rezultate remarcabile în această direcție.

— Aici, dragă Toa, dă-mi voie să te întrerup. Aș vrea să știu, cum de i-a venit lui Griss o asemenea idee năstrușnică ? Când vorbim între noi, pot foarte bine să înlocuiesc *negația*, *nu ești frumos* — cu afirmația *ești urât* dar în matematică ?

— La fel și aici. În loc să spun că într-un plan două drepte nu sînt paralele, pot spune că ele se întîlnesc, sau în aritmetica numerelor întregi și raționale negația ($a \neq b$) adică : „*a* nu este egal cu *b*” se poate înlocui cu una dintre afirmațiile $a > b$ sau $a < b$. Bineînțeles că aceste exemple nu se pot generaliza, cu alte cuvinte treaba nu-i chiar așa de simplă ! Dar cu aceasta nu am răspuns încă nedumeririi tale. Explicația o dă Heyting, care spune așa : „Obiecțiile serioase contra folosirii negației în matematică au fost aduse de Griss... Deși este complet de acord cu ideile de bază asupra naturii matematicii, el susține că dacă o noțiune matematică își are originea ei într-o construcție matematică ce poate fi executată, atunci cînd construcția este imposibilă, noțiunea nu poate fi clară. Brouwer admite o teoremă ca : „un cerc pătrat nu poate exista” ; noi o putem dovedi

stabilind o contradicție din presupunerea că am construit un pătrat care ar fi, în același timp, și un cerc. După Griss, această presupunere nu este clară, din cauză că nu poate fi niciodată realizată. Cu alte cuvinte, dacă un cerc pătrat nu poate exista, cum putem avea o noțiune clară despre ceea ce ar putea fi dacă ar exista ? De aceea, Griss respinge negația dintre noțiunile matematice".

— Aici Heyting nu-i de acord cu Griss fiindcă, spune el, deși „noțiunea de negație are pentru noi mai puțină importanță decât în matematica obișnuită”, ea este înlocuită cu noțiunea pozitivă *numai cînd aceasta este posibil*. În celelalte cazuri, Brouwer și Heyting au introdus un nou simbol de *inegalitate* între numere, „mai tare” decât simpla inegalitate, anume pe aceea de *separație*. Cînd scriu $a = fcb$ această relație reprezintă negația obișnuită a egalității dintre a și b . Întuiționiștii nu o consideră însă suficient de clară și Brouwer folosește noțiunea de „separație”, notată prin simbolul $\#$, cu observația că atrage după sine $a \wedge b$, dar aserțiunea inversă nu-i adevărată. Iată cum este introdus acest nou simbol: dacă se consideră două numere reale a și b , definite ca limitele unor șiruri convergente de numere raționale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{n+p}, \dots$ și $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, b_{n+p}, \dots$, se spune că a este separat de b ($a \# b$), dacă se pot găsi doi întregi n și k , astfel că pentru orice p , să avem

$$| \quad | \quad h$$

Așadar, în cazul separației a două numere, se cere să se precizeze numerele n și k , condiție ce nu se pune în cazul simplei negații $a \wedge b$. (27, p. 19)

— Dacă ai făcut această completare, pe care îți mărturisesc că aveam de gînd să o las deoparte, atunci mă văd obligat să citesc încă vreo cîteva rînduri despre Griss, din capitolul început. „Prima noțiune negativă care apărea în această lucrare era aceea a neegalității dintre numerele reale, $a \neq b$. Griss nu putea admite această noțiune ca bine definită; el a folosit în schimb relația $a \# b$, care este definită pozitiv. Însă, printre proprietățile de bază

ale acestei relații # este următoarea: $\sim |a \rightarrow b \rightarrow a = b$. Înlocui acestei proprietăți, Griss folosește ..." (27, p. 121)

— Bine faci că te-ai oprit, căci nu are rost să urmărim detaliul, ne interesează faptul în sine, acela că dacă intuiționiștii nu se înțeleg nici între ei, ce mai avem de discutat despre acei ce nu le împărtășesc principiile ! Au reușit ei să elimine antinomiile, în schimb, le-a venit pe cap beleaua *negației intuiționiste*, care nu-i cu nimic mai prejos decât aceea de care au vrut să pătimească logiciștii și formalistii, atît din cauza antinomiilor, cît și din cauza teoremei lui Gödel.

— Ba eu aș vrea să mai discutăm și despre acei ce nu le împărtășesc principiile, cum spui tu. Nu vreau să trec peste părerile exprimate de Gödel în *Fundamentele* lui (12, p. 193), cum ar fi, de pildă, acestea: „Brouwer admite, se pare, fără restricțiuni, următoarea axiomă (de logică) : Toate categoriile infinite se sustrag de drept principiului terțiului exclus, principiul păstrîndu-și valabilitatea pentru categoriile finite... Trebuie să observăm că radicalismul intuiționiștilor depășește puterea de înțelegere a observației, în ea însăși de o exactitate indiscutabilă, că principiul terțiului nu-i aplicabil întotdeauna. De la acest fapt, constatat cu certitudine în anumite cazuri, ei trec brusc la afirmația... că principiul nu-i niciodată valabil de îndată ce-i vorba de categorii infinite. Nu cred că se va renunța vreodată să spunem că *orice* număr întreg este par sau impar, afirmație care are cu siguranță un sens, iar dacă în acest caz pretendem că al treilea este exclus, nu-i din cauza unui principiu formal oarecare, ci tocmai în urma cunoașterii directe și intuitive a ceea ce reprezintă această mulțime. Este poate indicat să citim aici o observație a lui Brouwer : „Chiar dacă aplicarea principiului terțiului exclus nu ar conduce niciodată la o contradicție, nu-l putem considera ca legitim, după cum o crimă care nu-i dovedită de judecători, nu încetează de a rămîne o crimă". Brouwer

consideră — se vede — principiul său „după care principiul terțului exclus nu se aplică la mulțimile infinite ca expresia unui adevăr absolut. Așadar, analiza operează cu noțiuni greșite — deși eroarea ar putea rămîne secretă — și intuiționistul nu poate vedea în ea decît un joc al spiritului extrem de strălucitor, dar nu o știință. Acest punct de vedere este desigur dintre cele mai interesante. El prezintă un amestec curios de critică ascuțită și de dogmatism cu un caracter aproape teologic". La pagina 230, Gonseth este și mai categoric : „Intuiționiștii — și înaintea lor empiriștii ca Baire și Borel — dau dovadă de o stranie timiditate în fața infinitului, pe care-l consideră, pur și simplu, de neînțeles. Ei acceptă ca dogmă afirmația următoare : „Spiritul omenesc nu-i capabil decît de un număr finit de acte de gîndire ! " Cel mai uimitor ne pare a fi faptul că ei sînt convinși că această frază are un înțeles... infinitul în matematică pare să fie puntea aruncată între două concepte ireductibile unul de celălalt numai prin logică. Formarea conceptelor este un act al gîndirii absolut irațional: să vrei ca el să fie finit înseamnă să vrei ca el să nu fie. Aplicate la activitatea gîndirii, cuvintele finit sau infinit își pierd sensul lor. Infinitul matematic este un concept derivat, explicativ, ca și numărul, este poate cel mai necesar, cel mai prețios și cea mai legitimă dintre toate noțiunile matematice. Dacă se acceptă acest mod de a vedea, infinitul nemai-avînd decît o semnificare relativă, teza intuiționistă nu poate fi apărută ; ea se bazează pe caracterul absolut al finitului și al infinitului chiar și în intervențiile gîndirii. Considerată astfel, această revoluție ar putea fi ușor interpretată ca cea mai reacționară interdicere de a gîndi. Trecerea la concept reprezintă o accelerație nedefinită a gîndirii, nu avem nimic de profitat dacă refuzăm acest dar al zeilor".

— Gonseth a publicat aceste observații în 1926, după cîte văd ! Problemele puse de el au fost discutate și încă se discută. Dovadă este cartea

apărută în 1959, *Constructivitatea în matematică* (28), în care Heyting a publicat comunicările ținute la Amsterdam, în 1957, despre acest subiect. Dintre acestea, deosebit de interesantă pentru discuția noastră îmi pare conferința lui Andrzej Mostowski (p. 179) :

„Despre diferitele grade ale constructivismului” și așa vrea să o privim mai îndeaproape. Mostowski pornește de la observația că orice analiză a noțiunilor generale matematice sau nematematice presupune o anumită orientare filosofică ce poate fi spre *idealism* (în sensul platonice al cuvîntului) sau spre *nominalism*.

— Nominaliștii sînt aceia care consideră că numai lucrurile individuale au existență reală, pe cînd conceptele generale nu există, ele fiind simple denumiri ? Așadar, constructivismul reprezintă direcția nominalistă din fundamentele matematicii ?

— Da. Și acest caracter nominalistic al constructivismului se pune în evidență prin aceea că intuiționiștii nu acceptă noțiunile generale ale matematicii : număr, mulțime, funcție etc. ca fiind date, ci încearcă să le construiască, cu alte cuvinte să le definească în modul specific cerințelor constructivismului.

— Foarte interesantă este observația autorului că „în ciuda deosebirilor profunde dintre concepțiile de bază ale constructivismului și ale matematicii clasice (platonice) există ramuri ale matematicii în care teoriile, bazate respectiv pe ambele concepții, au dus la rezultate pe de-a-n-tregul echivalente. Acesta este cazul, de exemplu, pentru aritmetica întregilor, a cărei fundamentare clasică este dată de teoria lui Frege și cea constructivă stabilită de recenta teorie a lui Lorenzen (1955), în care un întreg este identificat cu un simbol care constă din linii consecutive. Ambele teorii sînt, matematic, echivalente. Din punct de vedere filosofic, teoria constructivă este chiar mai satisfăcătoare decît cea clasică, din cauză

că ea permite dezvoltarea aritmeticii fără a mai presupune existența mulțimilor infinit actuale, ipoteză necesară în teoria clasică". Mostowski arată că există și alte teorii echivalente, rezultate prin stabilirea lor pe cale clasică sau intuiționistă, cum ar fi aritmetica numerelor raționale și aritmetica numerelor algebrice. „Diferența esențială între calea constructivă și cea clasică", spune autorul, „apare în teoriile privind mulțimile nenumărabile. La aceste teorii aparțin, întâi, aritmetica numerelor reale, analiza (adică teoria funcțiilor arbitrare de numere reale) și teoria mulțimilor". Ne oprim aici, căci mai departe autorul își propune să dezvolte unele teorii legate de fundamentarea constructivă a aritmeticii numerelor reale, de fundamentarea analizei și a teoriei mulțimilor.

— Asta înseamnă că îi vine rîndul cărții lui Bishop, cu care te făleai la începutul discuției noastre ?

— Ai ceva contra, dragă Teodor ? Deocamdată ți-o dau să te uiți printr-însa, că eu mai am niște treburi.

— Dacă-i vorba de cafea, dragă Bădie, nu mă dau în lături !

— Atunci vino de-mi ajută ! Tu pune ibricul că eu mi-am adus aminte să mai caut ceva prin dulap.

— Bună cafea. Nucule, de acuma te investesc pe tine cu trebușoara asta !

— Și eu adaug : „Vrednic este". Cît privește cartea lui Bishop (29), după titlu : *Fundamentarea analizei constructive*, și după cîte am putut să-mi dau seama cît am răsfoit-o, pare foarte serioasă !

— Eu am întîlnit, în cîteva articole recente, citat și autorul și cartea pe care o avem, de altfel, în Biblioteca Seminarului. Nu știam însă că mata, Bădie, ți-ai procurat-o personal.

— Întîmplarea a făcut să o pot căpăta și mi-a făcut cu adevărat plăcere. Cartea aceasta înseamnă un mare succes pentru intuiționism, pentru că Bishop a găsit metode efective ca să se realizeze

constructivismul.

— Asta-i bună ! Dar Brouwer și Heyting ce au făcut ?

— Ei au făcut altceva. Ei au căutat să stabilească mai mult o *fundamentare* constructivă a matematicii, au considerat problema în general, dar nu au realizat-o tehnic. Bishop *nu mai aruncă teorii întregi*, cu greu agonisite, *dincolo de gardul matematicii*, ci le *păstrează*, silindu-se să le dea interpretarea intuitivă de care aveau nevoie. El a găsit modalitatea de a da o formă constructivă acelor teorii despre care spunea și Mostowski că, din punct de vedere intuizionist, se deosebesc esențial de matematica obișnuită : teoria numerelor reale, teoria mulțimilor etc. Dar mai bine, hai să urmărim împreună, deocamdată, *prefața*. Cred că vă va părea curioasă, căci deși e scrisă în 1967, pare că s-ar potrivi mai bine cu 40—50 de ani în urmă. Iată cum începe : „Multor matematicieni le-ar veni greu să creadă că pot exista neînțelegeri serioase în legătură cu fundamentele matematicii, unele dintre ele putând afecta chiar propria lor activitate matematică”.

— Am înțeles, nu-ți place această frază, ți se pare anacronică ! Dar nu este. Crezi că dacă pe noi ne-au interesat fundamentele matematicii, este obligatoriu ca *toți* matematicienii să se ocupe de acest lucru ? Deloc ; ei urmăresc domeniul lor de predilecție și acolo sînt la ei acasă; de rest, adică de fundamente, habar n-au. Ei cunosc literatura din specialitatea lor strictă, pot urmări articolele respective și cred că fac destul. Așa că, pentru aceștia, introducerea e foarte bună și te rog citește mai departe.

— Poate că ai dreptate. Atunci ascultați: „Atitudinea lor reprezintă starea actuală a lucrurilor : timp de o jumătate de secol, de un splendid progres matematic, nu a fost nici o deviație de la normal. Vocea disidenților, neluată niciodată prea în serios, a tăcut mult timp. Poate că nu era încă vremea favorabilă introspecțiilor.

Matematica înflorea ca niciodată mai înainte. Scopul ei este imens, calitățile ei superioare... metodele matematice sînt mai maleabile decît înainte. Dovadă, valul de interes pentru logica matematică, biologie matematică, economie matematică, psihologie matematică și investigațiile matematice de orice fel. Ele arată adîncă atracție pe care o are mintea contemporană pentru exactitatea matematică.

Și totuși, există nemulțumiri în comunitatea matematică. Matematicianul pur este izolat de lume, care are puțină nevoie de creațiile lui strălucitoare. El suferă de o alienare care apare inevitabilă : a urmărit raza strălucitoare și ea l-a scos din lumea aceasta... Matematica este un amestec de real și ideal, uneori apare una, alteori alta, încît e greu să precizăm care față s-a arătat. Componenta realistă a matematicilor, dorința pentru interpretarea pragmatică, îngrijește controlul care determină mersul dezvoltării și împiedică matematica să cadă într-un formalism fără de înțeles. Componenta idealistică permite simplificări și îi deschide posibilitățile care altfel i-ar fi închise. Teoria demonstrației și obiectivul investigației fusese realizat să formeze un joc, dar actuala comportare a jocului este motivată de considerații pragmatice. De acum 50 de ani nu s-au mai făcut schimbări semnificative în regulile acestui joc. Matematicienii erau unanim de acord cum trebuie jucată matematica... Au existat totuși și încercări de a constructiviza matematica, pentru ca să fie purificată complet de conținutul ei idealistic. Cea mai susținută încercare a făcut-o E. E. J. Brouwer începînd din 1907. Mișcarea pe care a inițiat-o a murit demult, ucisă în parte de compromisurile discipolilor lui Brouwer față de punctul de vedere idealist, în parte de particularitățile străine ale sistemului lui Brouwer care-1 făceau să pară vag și chiar ridicol matematicienilor ce-1 practica, dar, mai ales prin nereușita lui Brouwer și a urmașilor săi în încercarea de a convinge pe

matematicienii că părăsirea punctului de vedere idealist nu va steriliza sau paraliza dezvoltarea matematicii. Brouwer și alți constructiviști au avut mai mult succes prin criticarea matematicii clasice, decît prin sfortarea lor de a o înlocui cu ceva mai bun. Mulți matematicienii familiarizați cu obiecțiunile lui Brouwer asupra matematicii clasice admiteau valabilitatea lor, dar nu erau convinși că ar putea exista o alternativă satisfăcătoare".

— Gădesc juste observațiile lui Bishop, dar m-a izbit afirmația că mișcarea întemeiată de Brouwer a murit de mult. Nu a trecut nici un ceas de cînd pentru noi trei, ea era în plină desfășurare.

— Dacă admitem că nu-i vorba de o moarte naturală, ci de o *ucidere*, cum o spune și el, în acest caz, poate că are dreptate, dat fiind că intuiționismul, așa cum a fost el creat, la început nu și-a păstrat puritatea lui originală, căutînd motive, ba să se formalizeze, ba să se axiomatizeze !

— Aici poate că ai ajuns chiar la părerea lui Bishop, care urmărește să revină la intuiționismul pur, fără compromisuri. De aceea, poate că nici nu-l considera pe Heyting ca intuiționist, căci niciodată nu-i citează rezultatele ci numai cartea lui Heyting *Intuiționismul* e trecută în bibliografie. Urmărind mai departe prefața, Bishop spune pe șleau : „Această carte este o piesă de propagandă constructivistă, destinată să arate că există o alternativă satisfăcătoare. în acest scop, noi dezvoltăm o largă porțiune a analizei abstracte într-un mod constructiv... Programul nostru este simplu : să dăm interpretări numerice la cît mai multe dintre noțiunile clasice din analiză. Motivarea noastră este binecunoscutul scandal, expus de Brouwer (și alții) în amănunțime, că matematica clasică este lipsită de înțeles numeric".

Ca să realizeze acest program, Bishop se bazează pe trei principii fundamentale : 1. Să facă toate noțiunile afirmative (chiar și noțiunea de inegalitate este afirmativă). 2. Să evite definițiile

care nu sînt potrivite (noțiunea de funcție continuă într-un punct nu-i potrivită. O funcție continuă este aceea care este uniform continuă pe intervale compacte). 3. Să se evite pseudogeneralități. (Ipotezele separabilității sînt folosite în mod liber). în încheiere, Bishop arată că „această carte are un triplu scop : 1) să prezinte punctul de vedere constructivist, 2) să arate că programul constructivist poate fi realizat, 3) să pună o bază pentru cercetările viitoare. Acest scop va grăbi ziua cînd matematica constructivă va fi acceptată ca normală”.

— Ce ți-e și cu constructiviștii ! Toți au ideea fixă că numai părerile lor trebuie acceptate ca singurele valabile ! Nu degeaba au fost acuzați de fanatism, de subiectivism, ba chiar și de idei mistice !

— Da, o și afirmă singur, în ultima frază din prefață : „Noi nu susținem că matematica idealistă nu are însemnătate din punct de vedere constructiv. Ar fi fost așa de nerod ca și cum am susține că matematica neriguroasă nu ar avea valoare din punct de vedere clasic. Fiecare teoremă dovedită prin metode idealiste este o provocare : să se găsească o versiune constructivă și să i se stabilească o demonstrație constructivă”.

— Am văzut că primul capitol este intitulat „Manifestul constructivist”. Este oare o punere solemnă în temă ?

— Așa se pare. El prezintă aici concepția constructivistă a matematicii, considerînd-o drept acea parte a activității intelectului nostru care premerge biologiei noastre. „Matematica, o creație a minții”, spune el, „este mai puțin arbitrară decît biologia sau fizica, creații ale naturii”. Ea trebuie să se fi născut dintr-o necesitate interioară. Numărul întreg pozitiv este privit ca element primar al matematicii și prin urmare dezvoltarea teoriei întregilor pozitivi, începînd cu noțiunea de unitate, a noțiunii de adăugare a unei unități, și procesul inducției matematice sînt produsul direct al

inteligenței noastre. Interesantă îmi pare observația autorului cu privire la cele afirmate de Kronecker.

— Povestea că Dumnezeu ar fi creat numerele întregi ?

— Da, însă el mai adaugă : „Kronecker s-ar fi exprimat mai bine dacă ar fi spus : că întregii pozitivi au fost creați pentru beneficiul oamenilor (și ale altor ființe finite). Matematica aparține omului și nu unor personaje imaginare. Pe noi nu ne interesează proprietățile întregilor pozitivi care nu au un înțeles pozitiv pentru omul finit. Când un om dovedește că există un întreg pozitiv, el trebuie să arate cum l-a găsit”.

— Așadar, dacă aritmetica întregilor pozitivi i-a fost oferită omului de propria lui inteligență, tot lui îi rămîne să stabilească relațiile care-l duc de la număr spre crearea celorlalte adevăruri matematice, mai complicate.

— Desigur, și de aceea el trebuie să caute construcțiile prin care să descopere relațiile noi dintre mărimile matematice construite anterior. Relațiile care formează punctul de plecare sînt *ordinea și relațiile aritmetice dintre întregii pozitivi*. De la acestea se construiesc diverse reguli de împerechere ale întregilor, de separarea lor, de asocierea lor, stabilindu-se astfel noțiunile de mulțime sau de funcție. Și acum iată definiția constructivă a mulțimii: „O mulțime nu este o entitate care are o existență ideală. Ea există numai dacă este bine definită. Ca să definim o mulțime îi prescriem, cel puțin implicit, ceea ce trebuie să facem ca să construim un element al mulțimii și cum putem stabili ca două elemente ale ei să fie egale. Aceeași observație se aplică și la definirea unei funcții ; ca să definim o funcție printr-o mulțime A pe o mulțime B , se stabilește un procedeu finit prin care se leagă un element din A de un element din B și se arată că elemente egale din A determină elemente egale în B . Construind structurile de bază ale matematicii, sistemul

numerelor raționale, sistemul numerelor reale, spațiile euclidiene, sistemul numerelor complexe, cîmpul numerelor algebrice..., vom găsi cea mai mare parte a matematicii".

— Și le realizează ?

— În foarte mare măsură, da. Păcat că noi nu putem să aprofundăm toate aceste probleme.

— Ba da, dar ne-ar trebui cîteva luni de studiu individual ! Pentru Bădia cred că-i un fleac ; după cîte vād, el a tocit destul din cartea asta !

— Ia lasă aprecierile deoparte. Ție, dragă Toa, dacă ai să vrei, am să-ți dau cartea să o frunzărești. Eu aș vrea să mă opresc numai puțin la cîteva rînduri din Anexa B, de la sfîrșitul cărții, care are drept titlu : „Aspecte ale adevărului constructiv”, fiindcă atinge problema contradicției, începe așa : „Rolul contradicției în matematica constructivă cere anumite comentarii : după cum s-a observat în capitolul I, există două puncte de vedere posibile. Să presupunem că pentru a dovedi o propoziție P , am construit un întreg n , despre care știm că poate avea una dintre valorile finite $1, 2, 3... N$. Care dintre aceste N valori va lua, depinde de datele numerice particulare ale propoziției P . Pentru condițiile date, n se calculează printr-un număr finit de operații. Ca să dovedim P , sînt de considerat N cazuri : $C_1, C_2 ... C_N$, folosind de fiecare dată alt argument n . Să presupunem că unul dintre aceste cazuri, C_m , duce la o contradicție, adică presupunerea $n = m$ conduce la egalitatea $0=1$. Atunci, fie că excludem acest caz, considerînd că el nu se poate întîmpla pentru nici o valoare permisă a datelor numerice sau putem fi mai meticuloși și să dovedim că și în acest caz, propoziția P este valabilă. Prima posibilitate, adică excluderea cazului C_m , fiindcă duce la contradicție, pare să ceară o încredere în consistența matematicii constructive și astfel se naște problema atitudinii constructiviste față de problema consistenței. Pentru constructivist, consistența... este o consecință a gîndirii corecte.

Consistența unui sistem formal particular, chiar dacă este dovedită în mod constructiv, nu reprezintă un rezultat foarte interesant pentru un matematician constructivist. Dar fiindcă consistența este o consecință a gândirii corecte, inconsistența trebuie privită drept o consecință a gândirii necorecte. Matematicianul constructivist, fiind om, nu va fi surprins, dacă unul dintre rezultatele lui duce la o contradicție. În acest sens, el nu crede în consistența matematicii constructive. O inconsistență îl va obliga să-și examineze gândirea și să găsească unde a greșit. Pe de altă parte, o demonstrație constructivă care duce la o contradicție este greșită poate prin definiție. În acest sens, el trebuie să creadă în consistența matematicii constructive și de aceea poate exclude, fără nici o ezitare, cazul C_m care l-a dus la contradicție".

— Cele ce mi-ai citit aș vrea să le completez cu o observație, plină de ironie, e drept, pe care a făcut-o Gonseth, cu privire la intuiționiști, cu vreo 30 de ani înainte de a fi scris Bishop această carte, dar care mi se pare cum nu se poate mai potrivită, aici. Uite, o am notată, în caietul meu : '7, Matematicianul intuiționist încearcă să degajeze, printr-un studiu asupra activității spiritului omenesc, o platformă pentru a-și așeza edificiul său matematic. Dar să notăm, pentru a evita o neînțelegere, că el refuză să descrie pe larg această platformă, pentru că ea nu a găsit, și poate că nu va găsi niciodată, forma sa definitivă", (p. 17). Cu asta cred că am putea încheia discuția noastră asupra constructivismului, nu ?

— Eu cred că nu ! Mi-ar fi plăcut să se fi încheiat cu o apreciere pozitivă și constructivă !

— Ei bine, atunci hai să-i fac gustul nepoțelului meu ! Iată, mă ridic de la masă și merg înspre dulap. Acum, la comandă... „înseamnă că azi vom avea ceva de furcă ! îmi pare rău că nu vine și doctorul Ursu"...

— Cum ? Ce înseamnă asta, Bădie ?

— Înregistrarea pe bandă ! Doar nu-i puteam refuza o bucurie aceluia care mi-a făcut și mie cea mai mare bucurie posibilă ! Totodată am vrut să-i arăt prietenului și colegului meu că poate vorbi și când e înregistrat.

— Ei, dacă-i așa încaltea hai să ne ascultăm și să vedem ce am fost în stare să vorbim.

VIII

LICURICII DIN ADÎNCURI

Discuția a început-o doctorul Ursu, care a spus : Banda de magnetofon a fost pentru mine o adevărată relaxare și bucurie ; în plus, m-a surprins feciorul meu — căci am ascultat banda acasă împreună — care mi-a sechestrat-o ! Zicea că dorește să o asculte cu niște prieteni de-ai lui, tot ingineri ca și el. A doua surpriză a fost numai a mea când *nu am aflat* despre ce vom vorbi astăzi. Mi-am zis că, neaș- teptându-vă la acel final, ați ascultat și dumneavoastră banda și nu ați mai stabilit programul, conform ritualului obișnuit. Venind încoace mi-am amintit astfel de prima noastră întâlnire, când tot așa ca și astăzi, nu știam nimic despre problemele de matematici ce urma să le ascult și care, de-atunci, m-au prins într-o capcană din care nu mai doresc să scap.

— Sînt dezolat, stimată doctore, dar trebuie să vă anunț că, deocamdată, capcana s-a deschis, tot așa de neașteptat pentru dumneavoastră ca și atunci când s-a închis, căci azi va fi ultima noastră întâlnire. Desigur că peste cîteva luni, dacă veți fi de acord, le vom putea relua, acum însă mi s-a fixat examenul de doctorat și de aceea, cîteva luni, pînă-mi voi redacta teza și voi trece examenul nu-mi mai pot îngădui nici un fel de alte preocupări. Bădia și profesorul meu nu au vrut să asculte sugestia mea, aceea de a continua discuțiile fără mine... Noi am stabilit toate acestea data trecută, precum și subiectul de azi, dar după ce magnetofonul își

făcuse datoria ; de aceea, iată a treia surpriză a dumneavoastră. Și așa se zice că „lucrurile bune sînt trei”.

— Ultima surpriză nu-mi pare chiar așa de bună. Oricum, vă rog să-mi spuneți programul de azi.

— Programul este „fără program”. Fiind o întîlnire, să-i zicem „festivă”, fiecare dintre noi are voie să pună întrebările ce-l frămîntă și ceilalți să încerce să dea o mîna de ajutor, ca să le lămurească. Noi am știut asta, dumneavoastră o aflați acum. Sînteți de acord ?

— Cum să nu, sînt foarte bucuros de asta și chiar vreau să profit de ocazie ca să vă cer să-mi vorbiți despre adevărul matematic. Bănuți desigur că sînt încă sub impresia discuției la care nu am putut lua parte.

— Știm că dumneavoastră erați în stare să puneți mîna-n foc pentru adevărul matematic mai înainte de a vă fi uns noi cu toate unsorile, dar și acum ?

— Nici o unsoare nu ar putea zdruncina convingerea mea, de ordin sentimental, că adevărul pur nu-l pot găsi decît în matematică ! Renașterea nu datorează oare întregul ei avînt faptului că a avut încredere în adevărul matematic ?

— Aveți dreptate, stimate doctore, nu numai dumneavoastră, dar toți marii matematicieni, înțeleg pe acei ce au lăsat o urmă după ei, au fost convinși că au stabilit *adevărul* și probabil că ar fi privit cu multă milă, în ochii aceluia care ar fi încercat să pună la îndoială miezul absolut al adevărului demonstrat de ei.

— Da, Bădie, așa-i ! Descartes a spus limpede că „numai matematicienii au putut găsi cîtva demonstrații, adică raționamente sigure și evidente”. Și tot el a observat că „nefiind decît un adevăr în fiecare lucru, cine-l găsește știe atîta cît se poate ști”.

— Leibniz considera și el că axiomele sînt

consecințe evidente ale definițiilor, de îndată ce înțelegem termenii acestor definiții. Adevărul axiomelor nu încerca nimeni să-l discute fiindcă geometria își trecuse cu bine examenul prin aplicațiile sale în practică : succesele din navigație sau din alte „arte mecanice”.

— Dar mai înainte de a aminti de Descartes și Leibniz, nu ar fi trebuit oare să ne oprim la Platon, care considera că matematica este calea prin care poți atinge „adevărul în sine”, obiectele de care se ocupă ea avînd o existență proprie în lumea ideilor ? în epoca de glorie a științei grecești, geometria ajunsese la o anumită certitudine empirică, datorită tocmai încrederii de care se bucurau axiomele ei : — adevăruri clare și evidente prin ele însele, care *nu au nevoie de nici o demonstrație !*

— Aveți dreptate, stimate profesore, așa că fiecare alături de simpatia lui: dumneavoastră cu Platon, Bădia cu Leibniz și eu cu Descartes, să ne îndreptăm împreună înspre începutul secolului al XIX-lea, unde *adevărul absolut* al geometriei euclidiene a căpătat lovitura mortală. Și de la cine ? De la un tinerel cu numele *János Bolyai* transilvănean de origine, și de la un rus, pe nume Nicolai Lobacev- ski. În umbra lor se afla și marele Gauss, care deși era de acord cu ei, nu a scos nici un cuvîntel ca să-i aprobe sau să-i încurajeze.



Jinos

— Da, ci au adus în matematică un nou *adevăr absolut*, acela că *adevărul absolut* nu există ! Geometria neeuclidiană inventată de ei și apoi celelalte geometrii neeuclidiene sînt tot așa de *adevărate* ca și geometria lui Euclid, deși multe dintre *adevărurile* lor ne par absurde. Ele neagă *adevărul considerat absolut* al axiomei paralelelor, afirmînd, în schimb, că printr-un punct la o dreaptă se pot duce, fie mai multe, chiar o infinitate, de paralele, fie nici o paralelă. Rezul țatele obținute, deși erau evident logice nu puteau fi admise atunci, așa cum le admitem noi azi, chiar de cei mai buni dintre matematicieni. în celebra *lecție inaugurală* pe care a ținut-o marele matematician B. Riemann la Universitatea



Nikolai Ivanovici Lobacevski

din Gottingen, în 1854, cu titlul „Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei”, discutînd despre geometriile neeuclidiene a spus : „rămîne de văzut în ce măsură și pînă la ce punct aceste ipoteze sînt confirmate de experiență”. Ce avea să se verifice prin experiență ? Dacă suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte, cum o afirmă geometria euclidiană sau dacă este mai mică decît două unghiuri drepte,

cum rezulta din geometria lui Bolyai-Lobacevski, ori mai mare decît două unghiuri drepte, cum se demonstra în geometria neeuclidiană stabilită de Riemann. Numeroase au fost experiențele ce s-au făcut în această privință ; chiar și Gauss le-a făcut.

— Dar cum le-a făcut ? Ce fel de triunghi a considerat ?

— Un triunghi enorm, cu laturile cît distanțele stelare, fiindcă se punea problema ce fel de geometrie este compatibilă pentru Univers, cu toții fiind de acord că, în spațiul nostru limitat, rămîne valabilă geometria euclidiană. V-am spus aceasta ca să arăt că adevărul nou, rezultat odată cu apariția acestor noi geometrii, *nu trebuia verificat* de experiență, ci trebuia acceptat ca stabilit prin raționament ? Adică el trebuia să se impună ca un *adevăr matematic*, independent de orice fel de experiență !

— Da, dar atunci acest lucru nu a fost înțeles, și de aceea nu se putea accepta că toate trei geometriile *erau*

la fel de adevărate, dar nu *în mod absolut*, ci *relativ* ! Ele depindeau de ipotezele care se aflau la baza uneia sau alteia dintre geometrii.



Bernhard Riemann

— Cit de frumoase sînt cele trei articole ale lui Poincare despre „Geometriile neeuclidiene”, „Spațiul și geometria” și „Experiența și geometria” ! Vorbind despre natura axiomelor spunea : „Axiomele geometrice nu sînt nici judecări sintetice apriori, nici fapte experimentale. Ele sînt *convenții* ; alegerea noastră, printre toate convențiile posibile, este *îndrumată* de faptele experimentale ; dar ea este *liberă* și nu-i limitată decît de necesitatea de a evita orice contradicție”. Mai departe a pus și întrebarea : „Geometria euclidiană este adevărată?” și a răspuns: — „întrebarea nu are nici un sens ... O geometrie nu poate fi mai adevărată decît alta ; ea poate fi numai *mai comodă*. Or, geometria euclidiană este și va rămîne cea mai comodă”. (2, p. 66)

— Desigur, pentru că ea se bazează pe *intuiția geometrică* a spațiului fizic în care trăim noi.

— Vorbiți de *intuiția geometrică*, stimate profesore ? Dar ați uitat că și ea a trebuit să abdice de la locul de cinste pe care-l avea odată, în Antichitate, pînă ce, în sfîrșit, a fost reconsiderată de Brouwer și școala sa ? Spațiile cu n dimensiuni, create de Riemann nu se mai bazează pe nici un fel de considerații intuitive. Despre adevărurile

stabilite prin teoremele lor nu mai putem spune că sînt *evidente*, deși sînt tot așa de adevărate ca acelea evidente, demonstrate în geometria cu trei dimensiuni.

— Nu te contrazic, ci, din contra, îți dau apă la moară, invitîndu-te să ne vorbești de *curba lui Peano*.

— Adică despre a doua lovitură de grație dată intuiției, din care nici Brouwer n-a mai putut-o salva ? Ați auzit despre această curbă, dragă doctore ?

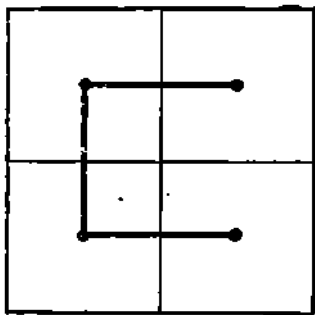
— Nu, dar ce-i cu ea ? E mai cu moț decît celelalte curbe ?

— Și încă cu ce moț ! Este o curbă continuă pe care o poți desena, dar nu-i poți duce nici o tangentă !

— Cum se poate ? Știu bine ce înseamnă o tangentă la o curbă. La cerc mai țin minte că tangenta este perpendiculară pe rază, la celelalte curbe o duci așa ca să atingă numai un punct al lor, asta înseamnă că sînt de fapt două puncte infinit apropiate.

— Admirabil, iubite doctore, sînteți tare pe poziție, numai că la curba lui Peano, pe care el a găsit-o din 1890, nimeni nu a putut să-i ducă vreo tangentă căci deși, după cum v-am spus, este continuă, ea umple un pătrat întreg !

— Nu-mi pot imagina deloc cum ar putea arăta, și mai ales cum s-ar putea desena o curbă care să umple un pătrat ? Asta-i în adevăr o minunăție demnă de un matematician !



— Atunci nu ne rămîne alta decît să o construim ! Întîi să desenăm pătratul pe care are să-l umple curba. Îl construim și îl împărțim în alte patru pătrate egale, ale căror centre la unim cu o linie continuă care să fie mereu paralelă cu laturile pătratului.

Fig. 3

— Dacă s-a înțeles tehnica, o aplicăm în continuare la fiecare din cele patru pătrate. Se obțin acum 16 pătrate. Le stabilim centrele și *ducem din nou o curbă* care să unească aceste centre, cu condiția ca ea *să fie continuă și ca segmentul care unește*

poate da rigoarea și nici certitudinea". Ocupându-se cu problema tangentei la o curbă continuă, se întreabă și el: „Cum a putut să ne amăgească intuiția pînă într-atîta ?" Și iată ce răspunde : „Cînd încercăm să ne imaginăm o curbă, noi nu putem să ne-o reprezentăm fără grosime. La fel, cînd ne reprezentăm o dreaptă, o vedem sub înfățișarea unei bande rectilinii de o anumită lățime. Noi știm că aceste linii nu au lățime și încercăm să ni le imaginăm din ce în ce mai subțiri, ca să ne apropiem astfel de limită, dar deși ajungem, într-o oarecare măsură să ne apropiem de ea, nu o vom atinge niciodată. Și atunci e clar că ne putem reprezenta întotdeauna aceste două panglici subțiri, una dreaptă, cealaltă curbă, în așa fel ca ele să se apropie una de alta și să nu se traverseze. Fără o analiză riguroasă vom considera că întotdeauna o curbă are o tangentă".

— De aceea, trebuie să tragem concluzia că există o discrepanță între *adevărul matematic* și *entitățile* la care se referă *acest adevăr*. Elementelor cărora le aparține adevărul matematic, noi le atribuim cel mai mare grad de siguranță, dar unde să găsim, în lumea experiențelor noastre, entitățile care să aibă proprietățile descrise de aceste adevăruri ? De exemplu : știu că două puncte determină o linie dreaptă, dar unde se află, în lumea noastră reală în care trăim, acele *două puncte* și acea *linie dreaptă* pe care le presupune axioma? Platonismul apare astfel ca prima străduință de a rezolva problema, fiindcă postulează existența punctelor și a liniilor geometrice, într-o lume închipuită doar cu mintea, iar cunoștințele noastre de geometrie se bazează pe un fel de reminiscență a noastră despre acea lume a ideilor !

— Iar dacă nu cerem ajutorul lui Platon, înseamnă că trebuie să fim foarte prudenți în privința *adevărului matematic*, ca să nu-l confundăm cu *adevărul intuitiv* ! Ca să fiu mai lămurit, am să aleg încă un exemplu : anume acela

despre demonstrarea egalității a două triunghiuri. Cum se procedează, cred că vă mai amintiți și dumneavoastră, stimate doctore.

— Mi se pare că da ; construiesc cele două triunghiuri, care trebuie să fie egale și apoi dovedesc egalitatea, supra- punându-le.

— Adevărat ! Sigur că dacă-s egale, ele trebuie să se suprapună. Dar cine-mi garantează că atunci când am luat un triunghi și l-am suprapus peste celălalt, în timpul acestei operații, nu s-a întâmplat nimic cu al doilea triunghi ? Orice gospodină poate să se îndoiască de acest adevăr atunci când întinde o foaie de aluat și-o taie, să admitem, în triunghiuri egale. Punând mâna pe unul dintre triunghiuri, el se întinde și nu se va mai suprapune exact peste celălalt. Or, *rigiditatea absolută* a figurilor geometrice nu-i garantată de nici o axiomă în *Elementele* lui Euclid !

— În adevăr, aveți dreptate și vă mărturisesc sincer că de abia acum l-am înțeles cu adevărat pe Hilbert ! Ca să nu existe asemenea amăgiri ale intuiției geometrice, el și-a bazat raționamentele geometrice pe definiții și pe axiome precise, din care a hotărît să înlăture orice urmă intuitivă.

— Și nemaifiind prezentă intuiția, e de la sine înțeles că în loc de a vorbi de un punct, pot vorbi de o halbă de bere !

— Va să zică, nu se poate afirma că geometria *este adevărată* în mod *absolut*, ci *relativ*, adică ea exprimă adevărurile ce decurg în mod logic din definițiile și axiomele pe care ni le-am ales noi singuri. Se potrivește aici această părere a lui C.P. Steinmetz pe care am găsit-o citată de E.T. Beli (16, p. 10) : „Matematica este știința cea mai exactă și concluziile ei sînt susceptibile de a fi demonstrate în mod absolut. Dar aceasta pentru că ea nu încearcă să tragă concluzii absolute. Toate adevărurile matematice sînt relative, condiționate”.

— Cred că nu putem încheia aici discuția, fiindcă nu am atacat decît un singur aspect al adevărului. Mai sînt și altele, de pildă nu am căutat

să vedem ce părere au intuiționiștii. În conferința lui D. Nelson, din cartea lui Heyting, *Negarea și separarea conceptelor în sistemele constructive* (28, 208), ni se înfățișează o altă față a adevărului matematic. Iată-o : „Dacă vrem să avem o caracterizare empirică a adevărului trebuie lămurit înțelesul *falsității* și al *negației*. În general o verificare experimentală a unei propoziții constă dintr-o *operație* urmată de o *observare* a unei proprietăți. Însă, după ce operația a fost executată, se pot ivi două cazuri care se exclud reciproc : să se observe proprietatea sau să nu fie observată. În al doilea caz, situația se prezintă confuz în ceea ce privește adevărul propoziției, căci din faptul că proprietatea respectivă nu a fost observată, nu rezultă numaidecât, în mod evident, că propoziția este falsă, fiindcă s-ar putea ca observatorul să *nu fi fost în stare* să constate acea proprietate, deși ea exista !”

— Bună interpretare, și sînt cu totul de acord cu ea. Dar, fiindcă a fost vorba de *evidentă* și *intuiție*, n-ați vrea să ne oprim oarecînd asupra acestor două noțiuni ? Simt eu că nu-mi sînt destul de clare și parcă aș vrea să mi le limpezesc.

— Bine, dragă doctore. În constructivism, *evidența* și *intuiția* sînt noțiuni de bază.

— De ce numai în constructivism. Nucule? Axioma evidenței stă și la temelia teoriei științelor deductive, formulată de Aristotel, și sună cam așa : „Într-o știință deductivă există un număr finit de termeni al căror înțeles este așa de evident încît nu cer nici o explicație. Cu ajutorul lor se definesc ceilalți termeni folosiți. Chiar și la întrebarea, cum putem ajunge noi, ființe omenești, la aceste adevăruri evidente, Aristotel a răspuns : „Prin viziunea *intuitivă*, care provine prin inducție, pe baza percepțiilor !”

— Aveți dreptate, stimate profesore, și nu știu dacă în afară de acest răspuns s-a mai dat altul. Dacă aș mai insista asupra acestui lucru, cu un exemplu, cred că nu-mi veți lua în nume de rău! Mi-

a venit în minte cazul tranzitivității relației $>$. Iată de unde ne vine cunoașterea acestei tranzitivități. Știm că $a > b$ și că $b > c$, dar de unde știm că și $a > c$? *In mod logic*, această relație, $a > c$, *nu se poate stabili*. Din $a > b$ pot afirma numai că a are proprietatea de a fi mai mare decât b și la fel din $b > c$, însă logica nu-mi spune nimic mai mult. Dar prin intuiție pot afla mai mult, căci dacă am înaintea mea trei mere de mărimi diferite, și le așez după mărime, atunci văd că primul măr, care este mai mare decât al doilea, este totodată mai mare și decât al treilea, care era mai mic cel de-al doilea măr. Spun că-i *de la sine evident că primul măr este mai mare și decât ultimul măr*, deși eu nu constatasem decât că-i mai mare decât al doilea măr !

— Să trag deci concluzia că *evidența* este o cunoaștere nemijlocită și ea nu poate fi stabilită altfel ? Iar *intuiția* ar fi procesul prin care se ajunge la evidență ?

— Cel puțin așa cred.

— Atunci mă întorc și întreb : dacă evidența este acea calitate a cunoașterii care exclude calitatea de dubiu și de eroare, de ce mi s-a părut evident că se poate duce întotdeauna o tangentă la o curbă continuă ?

— Nu sînteți numai dumneavoastră păgubașul. Pentru toți marii matematicieni din secolele trecute era așa de *evident* postulatul paralelelor, adică faptul că printr-un punct la o dreaptă nu se poate duce decât o singură paralelă, încît au refuzat să accepte altă geometrie decât cea a lui Euclid !

— Bine, dar atunci ce-i de făcut ?

— Ceea ce au făcut, de pildă, formalistii, cu Hilbert în frunte : să se asigure de necontradicția care ar putea decurge dintr-un adevăr — mai bine i-am spune axiomă — pe care ar crede-o evidentă.

— Aveți dreptate. Așa a procedat Hilbert cînd a introdus *metoda axiomatică*. El s-a străduit să demonstreze că sistemul axiomatic construit de el este necontradictoriu.

— Numai că aici s-a cam împotmolit. G. Gentzen spunea : „orice demonstrație a necontradicției presupune o metodă care este ea însăși nedemonstrabilă”.

— Drept ce vă spun, matematicienii sînt oamenii cei mai fascinanți din lume. Fantastic de fascinanți, căci afirmați mereu că *nu sînteți siguri pe nimic*, că *nu știți nimic* și cu toate acestea stabiliți totul și nimic nu se petrece în lumea asta, de la rachetele interplanetare și pînă la microscopul electronic, care să nu aibă pecetea matematicianului !

— Asta-i altceva, dar dumneavoastră nu ne-ați întrebat nici de rachete, nici de microscopul electronic, ci despre adevărul matematic, iar la această întrebare nimeni nu vă poate răspunde ! Iată, zilele trecute am primit ultimul număr dintr-o nouă revistă matematică, intitulată „The Mathematical Intelligencer” și cuprinde un articol, scris parcă anume pentru întîlnirea noastră de azi. Autorul este E. Snapper și articolul se cheamă „Teoremele matematice sînt analitice sau sintetice ?” (30). În el este vorba despre *adevărul matematic* și totodată, discutînd această problemă se trec în revistă multe dintre subiectele ce ne-au preocupat pe noi. Ni le vom reaminti și astfel vom avea, poate, o imagine mai limpede asupra lor. Deși am vorbit și noi despre propoziții analitice și sintetice, am să repet pe scurt ce spune autorul:



Immanuel Kant

În *Critica rațiunii filtre*, Kant face deosebirea dintre propozițiile analitice și cele sintetice. El numește o *propoziție analitică* aceea a cărei adevăr depinde numai de definiția simbolurilor ce intervin în ea. O propoziție analitică *nu ne informează, și prin definiție este adevărată. Propozițiile sintetice pot fi adevărate sau false.* O propoziție este sintetică dacă adevărul sau falsitatea ei nu depinde numai de definiția simbolurilor pe care le cuprinde, ci și de experiență, de intuiție sau de amândouă. De aceea, ea este *informativă*. După ce sînt date aceste lămuriri, autorul arată că din răspunsurile la întrebarea pusă în titlu se desprind *diferitele fiăreri desfire adevărul matematic*. Am să enumăr pe cele mai multe dintre ele, în ordinea în care se găsesc :

Răspunsul lui Kant : Teoremele matematice ne dau informații despre definiția simbolurilor ce apar în ele, de aceea sînt *sintetice*. Kant afirmă că siguranța absolută a adevărului propozițiilor matematice vine de la faptul că aceste adevăruri sînt complet independente de experiență ; ele sînt *apriori* și *intuitive*. În cazul propozițiilor sintetice obișnuite intervine experiența, dar în cazul celor matematice intervine intuiția pe care fiecare ființă

omenească o are înlăuntrul ei, anume *intuiția timpului* și *intuiția spațiului*. Dacă adevărul unei propoziții depinde de una dintre aceste două intuiții, asta înseamnă că adevărul ei nu depinde numai de definiția simbolurilor ce le cuprinde, ci și de intuiție ; or, aceasta face propoziția *sintetică* și deci *informativă*. Pentru Kant, noțiunile noastre despre numerele naturale 1, 2, 3... derivă din *intuiția noastră despre timp*, și adevărul teoremelor privind aceste numere, adică teoremele aritmeticii, depind de această intuiție. *Intuiția timpului* este cauza care face ca teoremele aritmetice să fie *sintetice* și totodată *apriori*, după cum *intuiția spațială* face ca teoremele geometriei să fie *sintetice* și totodată *apriori*.

— Bine, dar și propozițiile analitice sînt prin definiție *adevărate* și totodată *apriori*, căci ele nu depind de experiență. De ce le-a evitat Kant ?

— Pentru că ele nu sînt *informative*, și ... pentru că aceasta a fost părerea lui Kant. Urmează acum părerea opusă, *în răspunsul lui Frege* : Frege consideră că numerele întregi: 0, 1, 2,... se bazează numai pe logică. Nu-i vorba de *logica matematică*, ci de aceea care are înțelesul larg de „raționament independent de orice experiență și intuiție”. Frege a definit pentru prima oară *numărul cardinal* prin clasa mulțimilor la fel de numeroase. El a arătat cum se poate baza întreaga aritmetică pe logică și a susținut, contrar lui Kant, că teoremele aritmeticii se bazează numai pe logică și nu depind de experiență și intuiție, de aceea *sînt analitice*. Desigur că și Frege recunoaște că teoremele aritmeticii *sînt informative*, dar afirmă că aceasta se datorește modului cum sînt folosite *definițiile noțiunilor de bază ce apar în teoreme*.

— Dar cum s-a descurcat Frege cu propozițiile de geometrie ?

— în privința geometriei, Frege împărtășea vederile lui Kant, adică admitea *intuiția spațială*. Dar, aceste probleme nu le-a dezvoltat, fiindcă după ce trăsnetul antinomiilor a căzut din senin, el

a părăsit matematica !

Răspunsul lui Russell: A fost de aceeași părere cu Frege, dar, mai cutezător, el a considerat că în *Principia Mathematica* a putut dovedi că *întreaga matematică* se bazează pe logică. Astfel, el a pus bazele școlii logiciste, care susține că toate teoremele matematice sînt analitice.

— Aici s-ar putea spune multe. După cum știm prea bine, Russell și Whitehead au încorporat în *Principia Mathematica* și întreaga teorie a mulțimilor; or, această teorie nu poate fi derivată numai din principiile logice, ci au trebuit introduse și unele axiome ce nu aparțin logicii.

— Fiindcă sînt multe de spus, iată, de pildă, ce scrie A. Lautmann :

„Dezvoltarea noțiunii de tautologie a eliminat complet, în școala lui Russell, ideea unei realități proprii matematicii. Pentru Wittgenstein și Carnap, matematica nu este decît un limbaj indiferent la conținutul ce-l exprimă... matematica nu ar fi decît un sistem de transformări formale care permite să lege între ele datele fizicii. Dacă am încerca să înțelegem rațiunea acestei dispariții progresive a realității matematicii, ajungem la concluzia că ea rezultă din folosirea metodei deductive. Vrînd să se construiască toate noțiunile matematice, pornind de la un mic număr de noțiuni și de proprietăți logice primitive, se pierde din vedere caracterul calitativ și integral al teoriilor constituite. Or, ceea ce filosoful speră să afle în matematică este un adevăr care s-ar revela din armonia edificiului ei, și în acest domeniu, ca și în multe altele, cercetarea noțiunilor primitive ar trebui să cedeze locul unui studiu sintetic de ansamblu". (20, p. 23). Dar asta-i altă chestiune. Hai să vedem ce mai zice mister Snapper.

— Urmează *răspunsul intuiționiștilor* : Intuiționiștii consideră că matematica se bazează pe construcții mintale. Ca și Kant, ei consideră că numerele naturale: 1, 2, 3... sînt construcții mintale bazate pe intuiția timpului și în acestea se află de

fapt activitatea principală din care derivă întreaga matematică. De aceea, ei nu mai au nevoie de o altă intuiție, ca aceea a spațiului, ca să construiască celelalte ramuri ale matematicii. În această privință, părerile lor diferă de acelea ale lui Kant. Dar, fiindcă pentru intuiționist o teoremă matematică înseamnă afirmația că este posibilă o anumită construcție mentală, rezultă că referindu-nu la Kant și acceptînd-o ca pe o experiență, ei consideră teoremele matematice ca propoziții sintetice.

Răspunsul lui Poincare : Și Poincare admite că teoremele matematice sînt sintetice, dar din altă pricină, anume fiindcă ele se bazează pe inducția matematică. Poincare a fost un precursor al intuiționismului în sensul că el considera inducția matematică drept arhetipul raționamentului matematic. Cam acestea sînt părerile pe care le citează autorul, el însuși declarîndu-se intuiționist.

— Atunci, hai să mai adaug și eu *un răspuns, al Ini Goethe*:

— Interesant de tot, de unde l-ai cules ?

— Ei, acesta-i secretul meu ! Adevărul este că nu mai știu unde l-am citit, dar cînd l-am găsit, mi-a plăcut așa de mult că nu l-am mai uitat. Iată cum sună : „Matematica are reputația că ar duce la concluzii infailibile. Aceasta însă este pe de-a-ntregul fals, căci infailibilitatea ei nu-i decît identitate. De *două ori doi* nu este patru, ci este exact *de două ori doi*, căci aceasta este ceea ce noi numim, *mai pe scurt*, patru ! Dar patru nu înseamnă ceva nou. Și această comportare apare mereu și mereu în concluziile sale, cu excepția formulelor mai complicate în care identitatea este mai greu de observat”.

— După cîte văd, ai adăugat și acest răspuns numai ca să tragă și mai greu în cumpănă faptul că nu se poate trage nici o concluzie definitivă cu privire la natura adevărului matematic !

— Una, și încă definitivă, nu, dar mai multe, da. Iată una surprinzătoare : Am vorbit data trecută de

cartea lui Bishop, tipărită în 1967, carte cu un deosebit răsunet în lumea intuiționistă. Și, iată ce scrie Bourbaki în *Istoria matematicii*, apărută în a doua ediție, revăzută și adăugită, în anul 1969. Am să citesc exact, ca să nu fiu acuzat de vreo exagerare sau interpretare greșită : „Nu-i nici o îndoială că viguroasele atacuri venite din partea intuiționiștilor nu au forțat nici școlile matematice de avangardă și nici chiar pe partizanii matematicii tradiționaliste să se apere... Școala intuiționistă, a cărei amintire nu este destinată să rămână decît ca un titlu de curiozitate istorică, a adus cel puțin serviciul de a fi obligat pe adversari, adică imensa majoritate a matematicienilor, să-și precizeze poziția lor și să devină mai conștienți de rațiunea (a unora de ordin logic, a altora de ordin sentimental) încrederii lor în matematică”. (31, p. 56)

— Nu se poate să se fi scris asemenea rînduri: Cum ai spus : „amintire” și „Un titlu de curiozitate istorică ?”- E prea mult ! Chiar pentru un „om de pe stradă” ca mine ! Surprinzătoare concluzie, n-am ce zice !

— Și totuși, cartea stă mărturie în fața dumneavoastră. După cum bine știți, N. Bourbaki *nu-i oricine* și nici măcar *un singur om* ! Este o grupare a unora dintre matematicienii străluciți din Paris.

— în definitiv, o părere cam asemănătoare o exprima, cu ani în urmă, și Poincare, referindu-se la logiciști. Nu mi-e greu să găsesc citatul cu pricina. După ce critică anumite interpretări spune : „Orice ar fi, logica trebuie să fie refăcută și nu se știe prea bine ce se va putea salva... adevărata matematică, aceea care folosește la ceva, va putea să continue să se dezvolte după principiile ei proprii, fără ca să se preocupe de furtunile care fac ravagii în afara ei și să-și urmeze, pas cu pas, cuceririle obișnuite care sînt definitive și niciodată de părăsit”. (5, p. 206)

— în strașnică fundătură am ajuns ! Pe de o parte Bourbaki nu cunoaște sau nu apreciază

strădaniile intui- ționiștilor, pe de altă parte Poincaré nu-i de acord cu părerile logiciștilor, și, după cum am văzut, acestea nu-s singurele neînțelegeri !

— Desigur că nu ! Singura speranță de a găsi o cale de ieșire o zăresc în primul dintre cele trei volume pe care le ai mata, Bădie, în bibliotecă, intitulate : *Matematica conținutul, metodele și importanța ei*, carte care a fost compusă de un colectiv dintre cei mai de seamă matematicieni sovietici, bazându-se pe principiile materialismului dialectic, așa cum au fost expuse de Engels și Lenin (32).

— îmi amintesc și eu că, atunci când am citit *Anti- Dühring*, m-a uimit cu câtă pricepere discuta Engels probleme de matematici. Era totuși matematician ?

— Nu, dragă doctore. în capitolul I, scris de către binecunoscutul matematician A.D. Alexandrov, din care am de gând să vă citesc, intitulat „Privire generală asupra matematicii”, autorul răspunde la întrebarea dumneavoastră, astfel : „Fără a fi el însuși matematician, Engels a dat o analiză atât de adâncă fundamentelor acestei științe, nu numai pentru că a fost un gânditor genial, ci — și aceasta este un element principal — și pentru că stăpînea materia- lismul dialectic și se călăuzea după el în problema stabilirii esenței matematicii. Nu trebuie să ne mire, de aceea, că pînă la Engels nimeni nu a fost în stare să dea acestei probleme o soluție atât de profundă și de corectă. Nici cei mai mari matematicieni nu au reușit să o rezolve cu atîta amploare”. (32, p. 91)

— Foarte interesant ! Era deci îndreptățit să mă minunez și eu, un profan în matematici !

— Desigur. Acum am să ilustrez cele de mai sus, prin- tr-un citat din Engels, pe care-l menționează Alexandrov, la pagina 81, din acest capitol: „în matematica pură, intelectul nu se ocupă în nici un caz numai cu propriile sale creații și imaginații. Noțiunea de număr și de figură sînt

luate din lumea reală și nu de altundeva. Cele zece degete cu ajutorul cărora oamenii au învățat să numere... sînt orice vreți, numai nu o creație independentă a intelectului. Pentru a număra e nevoie nu numai de obiectele care se pot număra, dar și de capacitatea de a face abstracție, în considerarea acestor obiecte de toate celelalte însușiri ale lor în afară de număr, iar această capacitate este rezultatul unei îndelungate dezvoltări istorice bazate pe experiență. Ca și noțiunea de număr, și noțiunea de figură este luată exclusiv din lumea exterioară, și nu s-a născut în cap din gîndirea pură ...

Matematica pură are drept obiect formele spațiale și raporturile cantitative ale lumii reale, adică un material foarte real. Faptul că acest material apare într-o formă extrem de abstractă nu poate ascunde decît superficial proveniența din lumea exterioară ... Dar, ca în toate domeniile gîndirii, pe o anume treaptă de dezvoltare, legile abstrase din lumea reală sînt despărțite de lumea reală și îi sînt opuse ca ceva de sine stătător, ca niște legi venind dinafară, cărora lumea trebuie să li se conformeze". (32, p. 81) Pornind de la faptul că Engels subliniază că matematica reflectă realitatea, Alexandrov trage mai departe concluzia : „Posibilitatea de a considera în mod abstract obiectul matematicii are un fundament obiectiv în însuși acest obiect. Formele, relațiile, conexiunile și legile generale, independente de particularitățile calitative sau de conținutul concret pe care le reflectă matematica, există în mod obiectiv, independent de conștiința noastră... Acolo unde nu există astfel de forme și relații generale, indiferente față de conținut, nu este posibilă nici o considerare matematică". Acum, vă rog, atenție mărită, căci iată ce spune Alexandrov : „Caracterul obligatoriu al concluziilor speculative ale matematicii a putut duce la părerea greșită că matematica și-ar avea fundamentul în gîndirea pură, că ar fi apriorică, că nu ar proveni din

experiență, că nu ar reflecta realitatea. La concepții de acest fel a ajuns, bunăoară, celebrul filosof german Kant. Această concepție idealistă, profund greșită, se datorește între altele, faptului că matematica nu este privită de unii în apariția ei și în dezvoltarea ei reală, ci oarecum de-a gata. Această tratare este însă total neîntemeiată, pentru simplu motiv că nu este în concordanță cu starea reală a lucrurilor. Este un fapt bine stabilit că matematica nu este apriorică, ci a apărut din experiență". (32, p. 85) Tot așa de interesante sînt și următoarele observații ale lui Alexandrov : „Matematica a suferit întotdeauna, și mai suferă încă, o influență considerabilă din partea ideologiei. La fel ca în orice știință, conținutul obiectiv al matematicii este înțeles și interpretat de matematicieni și filosofi în cadrul unei anumite ideologii... Lupta materialismului, care corespunde conținutului obiectiv al științei, împotriva idealismului care contrazice acest conținut și denaturează înțelegerea lui, se manifestă în toată istoria matematicii. Această luptă este clar conturată încă în vechea Grece... Odată cu dezvoltarea capitalismului în Europa, concepțiile materialiste, care au reflectat ideologia înaintată a burgheziei în ascensiune din perioada secolului al XVI-lea — începutul secolului al XIX-lea, au început să cedeze locul concepțiilor idealiste". Și acum, te rog, în special, pe mata, Bădie, să iei aminte la cele ce urmează : „Poincare, marele matematician francez de la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului XX, a emis concepția idealistă a „convenționalismului", după care matematica este o schemă de convenții, adoptate pentru comoditatea descrierii varietății de date ale experienței. Astfel, după opinia lui Poincare, axiomele geometriei euclidiene nu sînt decît convenții, iar importanța lor este determinată de comoditate și de simplitate, nu de concordanța lor cu realitatea". (1, c.p. 99) Ce spui, Bădie, îți place ?

— Cunosc bine această părere și m-am gîndit de

multe ori la ea. Dar dacă ai să treci mai departe, ai să constăți că Alexandrov pune această chestiune într-un mod foarte cumpănit și, aş putea adăuga, chiar cavaleresc. Dă-mi te rog mie cartea, ca să-ți citesc și eu acest pasaj 1 Iată-1: „în condițiile capitalismului însă, convenționalismul, intuiționismul, formalismul și alte curente asemănătoare se mențin și chiar se completează cu noi variante ale concepțiilor idealiste asupra matematicii... Astfel, dificultățile din dezvoltarea matematicii au generat, în condițiile capitalismului, o criză ideologică a acestei științe, analoagă în fundamentele ei cu criza fizicii a cărei esență a fost stabilită de Lenin în geniala sa operă *Materialism și empiriocriticism*. Această criză nu înseamnă cătuși de puțin că, în țările capitaliste, matematica ar fi cu totul înfrântă în dezvoltarea ei. O seamă de savanți, care se situează pe poziții vădit idealiste, obțin rezultate importante, uneori cu totul remarcabile, în rezolvarea unor probleme matematice concrete și în dezvoltarea noilor teorii. Este suficient să ne referim la strălucita elaborare a logicii matematice”.

— Atunci, Bădie, mi se pare că ar fi nimerit ca acestor ample și importante observații ale lui Alexandrov să le urmeze concluzia pe care am găsit-o în discursul de inaugurare a *Discuțiilor* de la Zurich asupra fundamentelor matematicii : „Ca să caracterizez domeniul și obiectul acestor discuții, am să folosesc o imagine a matematicianului Gonseth... La fel, spune el, cum există podişuri în care a- pe se împart ca să coboare către oceane diferite, terenul acestor dezbateri ocupă o poziție centrală, și, după răspunsurile pe care le vom da la problemele puse, cursurile gândurilor noastre vor putea coborî către universuri intelectuale opuse”. (9, p. 10)

— Cu adevărat, frumoasă și chibzuită concluzie, deși eu voi continua să cred, în adâncul sufletului meu, într-un singur și inefabil adevăr matematic. De aceea, adesea mă întreb, și vă întreb și pe

dumneavoastră acum, prin ce se deosebește această *activitate matematică* de celelalte activități ale minții, în ce constă puterea de fascinație plămădită în ea, îneîț și cei ce nu și-o pot apropia, să o admire sau să se teamă de ea și, uneori, să viseze că ar putea-o înțelege ?

— Greu de stabilit acest diagnostic, dragă doctore. Nici în domeniul dumneavoastră nu-i chiar așa de ușor de pus un diagnostic, totuși aveți unele criterii, anumite norme după care puteți trage concluziile potrivite, dar în cazul acesta, tare mă tem că nici un matematician consacrat, cum ar fi Gauss, Cantor, Poincare, Hilbert, Brouwer, ca să amintesc numai câteva dintre numele mai des pronunțate de noi, nu s-a întrebat și de aceea nu a dat vreun răspuns la întrebarea: „ce l-a făcut să prefere matematica altei științe, pentru care ar fi avut de asemenea aptitudini și ar fi putut să-l intereseze ? Deși Gauss, Poincare sau Hilbert au cochetat și cu fizica, ori cu astronomia, matematica a însemnat preocuparea lor statornică”.

— Problema se poate totuși discuta, numai că înainte de a o ataca, să observăm că însuși înțelesul termenului *activitate matematică* nu-i același pentru toți matematicienii. Unii consideră matematica drept o știință deductivă și astfel activitatea lor, oricât ar fi ea de importantă și chiar genială, se reduce la o transformare logică a unor anumite propoziții admise ca adevărate, fie din domeniul aritmeticii, al geometriei, al analizei ș.a.m.d. Pentru alți matematicieni, activitatea matematică nu se reduce la un simplu joc al spiritului; ei o privesc condiționată nu numai de necesități interne ci, mai ales, de problemele concrete puse de viața din jurul nostru, adică de natură, de tehnică sau de diferite alte științe.

— Iată cam același lucru, spus de Brouwer, dar în ce formă ? Cred că veți fi tot așa de mirați ca și mine, când vă voi citi o parte din discursul final pe care l-a pronunțat el, în calitate de președinte al Academiei internaționale de filosofie a științelor, în

1950, cînd a prezidat Colocviul internațional de logică matematică, ținut la Paris. Mai mult nu vă spun ca să nu stric efectul pe care-l presupun I „Programul colocviului dîndu-mi cîntea de a spune cîteva cuvinte, drept concluzie, aș vrea să vă propun să considerăm pentru o clipă împreună matematica și logica, cele două științe așa de intim legate, care ne-au preocupat. De aceea, să coborîm în adîncul conștiinței noastre și să constatăm că la origine nu există acolo decît o lume-vis și și că în această lume-vis nu ia naștere o lume pragmatică decît prin mijlocirea *fenomenului de discernămint*, prin care se creează *omul gînditor* și a *fenomenului de ingeniozitate*, prin care se creează omul activ, asamblarea acestor două fenomene dînd naștere lumii exterioare și obiectelor. Apoi, numind *joc* orice activitate îndeplinită pentru ea însăși și nu provocată de frică, constrîngerea dorință sau vocație, să relevăm *existenta jocului* logic, care înlocuiește, prin discernămint, obiectele percepute cu obiecte fictive și pur indicative, și a *jocului matematic*, care face, prin discemă-mînt, completă abstracție de obiecte. Să remarcăm că aceste două jocuri pornesc și unul și celălalt de la un *fenomen prim de bi-unicitate* capabil de o pluralizare spontană și infinită care creează în cîmpul spiritului o vegetație nelimitată și exuberantă, cu mult mai bogată în cazul matematic decît în cazul logic, din cauza eliberării totale de povara obiectelor cu care se joacă matematica. Cele două jocuri, prin originea lor, se influențează reciproc. Prin natura lor, ele nu ar trebui să se amestece în viața socială. Dar aceasta, avînd nevoie de jocuri, ele suferă influența științelor pragmatice, cooperînd, contra naturii lor, la transformările vieții sociale, care se numește progres". (25, p. 75)



Universitatea din Göttingen

— Ai scontat bine. Nu-mi vine să cred că Brouwer al nostru, care mai că s-a luat de piept cu Hilbert cînd și-a susținut tezele intuiționiste atunci la Göttingen, a putut să afirme asemenea păreri legate de activitatea matematică !

— Știi că acuma mi-a devenit mult mai simpatic !

— Dar să nu uităm că discuția aceea de la Göttingen a avut loc prin 1926—1927 și discursul acesta a fost pronunțat după vreo 24 de ani, timp în care și Brouwer a mai îmbă- trînit !

— Ia să vedem cîți ani avea ? $1950 - 1881 = 69$ de ani ! Da, la această vîrstă simți nevoia să pătrunzi *în adîncul conștiinței* ! Chiar făcînd și unele concesii intuiționismului !

— Cînd am spus că *activitatea matematică* ar putea fi discutată mai îndeaproape, m-am gîndit la răspunsul pe care l-a dat Beth, în unul dintre paragrafele de încheiere ale cărților sale, adesea folosite de noi, paragraf intitulat „Elemente ale activității matematice”. (7, p. 201 și 21, p. 635) De acele fragmente am să mă folosesc îndeaproape ca să vă arăt cum privește el această problemă. Mai întîi, consideră că în activitatea matematică un rol

esențial îl are *elementul constructiv*, ori de câte ori apare necesară invenția ca mijloc de rezolvare a unor probleme concrete. Totodată, în dezvoltarea sistematică a matematicii ca domeniu științific, mai sînt necesare și alte clemente ca, de pildă, *elementul lingvistic* sau *limbajul*. Acesta permite fixarea, stocarea și transferul rezultatelor activității matematice astfel ca rezultatele obținute să se poată acumula și să ajute la tratarea altor probleme. Din interacțiunea acestor două elemente (cel constructiv și cel lingvistic) rezultă, în particular, dezvoltarea *metodei deductive*, adică *logica*, precum și diferite *sisteme de notație*. Și aceste noi elemente interacționează între ele și drept rezultat apare *dezvoltarea deductivă a logicii însăși* și apoi *formalizarea*. Faptul că limbajul este supus unui tratament constructiv implică două feluri de construcții. Alături de *construcțiile matematice* apar și *construcțiile lingvistice*: „nu se construiesc numai drepte și cercuri, ci se construiesc, totodată și demonstrații”. Dar din aceeași interacțiune rezultă și introducerea sistemelor de notații care trebuie să completeze și chiar să înlocuiască *limbajul natural* ce nu mai satisface nevoile create prin dezvoltarea metodei deductive. Mulțimea acestor elemente determină *structura matematică*. Alături de structură, *activitatea matematică* are încă și un *conținut* sau un *obiect*. *Structura matematică* derivă din lucrarea pe care o desăvîrșește matematicianul asupra acestui obiect și de aceea trebuie să ne așteptăm la faptul că *din considerarea obiectului activității matematice* să rezulte *noi elemente caracteristice* ale acestei activități.

— înainte de a trece la obiectul activității matematice, aș vrea să ne oprim ca să discutăm despre *structura matematică*. Noțiunea este foarte la modă și nu numai în matematici întîlnești cuvîntul *structură* și *structuralism*, ci în multe alte domenii, ca de pildă în filosofie. Eu am citit, nu de mult, și am în biblioteca mea două cărți deosebit de

interesante, una a academicianului profesor C.I. Gulian, *Marxism și structuralism*, iar alta a prea bine cunoscutului filosof francez Claude Lévi-Strauss, *Antropologia structurală*. Îmi pare rău că n-am știut că s-ar putea să ajungem la ele, că le-aș fi adus cu mine. V-aș fi citit câteva rînduri care...



Constantin I.

— Să nu vă pară deloc rău, dragă doctore, am și eu aceste cărți, așa că am să vi le pun la îndemînă.

— Bine, iar pînă atunci să stabilim originea cuvîntului. În latinește *structura* înseamnă *alcătuire, compoziție*, iar în matematici sensul lui s-a păstrat, bineînțeles cu completările specifice domeniului la care se referă. Avem de-a face, de pildă, cu *structuri algebrice*, cu *structuri geometrice*, cu *structuri topologice* ș.a. Bourbaki afirmă că noțiunea modernă de structură a fost pe deplin însușită către 1900, dar că i-a mai trebuit vreo 30 de ani de aclimatizare pînă să apară în plină lumină. La această observație mai adaugă și pe aceea că matematicienilor le-a venit destul de greu să se elibereze de impresia că obiectele matematice sînt date cu o structură a lor și că abia după ce au realizat această disociere, adică au stabilit că un același obiect matematic poate avea mai multe structuri, s-a putut trece la definiția

generală a structurilor. Numai că n-a dat-o în acel paragraf pe care l-am citit eu. (31, p. 34)

— Însă, eu știu, dragă profesore, că, de fapt, cercetările asupra structurilor algebrice au început mai înainte, înspre sfârșitul veacului al XIX-lea, adică îndată după ce a fost cunoscută și difuzată teoria grupurilor a lui Galois. Astfel, în Statele Unite ale Americii, *Benjamin Peirce* s-a ocupat de algebrele liniare, acestea putînd fi considerate ca primele cercetări asupra structurilor algebrice de dimensiune finită. E însă adevărat că atunci lucrările lui nu au fost înțelese, ba au și fost aspru criticate și că de-abia din secolul al XX-lea obiectul principal al algebrei nu a mai fost *teoria ecuațiilor*, ci *teoria structurilor algebrice* !

— Și în geometrie, deosebirea introdusă de Poncelet între *proprietățile proiective* și *proprietățile metrice*, care înseamnă prima interpretare structurală din geometrie, s-a făcut tot la sfârșitul secolului al XIX-lea. Iar *Programul de la Erlangen* nu a fost scris în 1872 ? Or, el este *tipul sintezei structurale a geometriei* !

— Aveți perfectă dreptate, stimate profesore. Demon- strînd că fiecare ramură a geometriei se caracterizează prin- tr-un grup propriu, el a stabilit o clasificare structurală a teoremelor din geometrie, tot înainte de 1900 !

— Numai oleacă v-am lăsat singuri și ați luat-o amîndoi razna ! Mă uit cu jale, cu cîtă răbdare vă lasă-n pace iubitul nostru doctor. Poftim cărțile !

— Mulțumesc pentru ele și pentru intervenție, căci chestia cu grupurile era pentru mine cam păsărească !

— Iar vă cer iertare ! Am luat-o razna fiindcă eu am impresia că toată lumea știe ce este un *grup*.

— Cum să nu ? Știu ce este un *grup* de oameni care s-au vindecat și părăsesc spitalul, sau un *alt grup* care vine să-i ia locul, dar nu cred că același lucru este și la *grupul* pe care-l are în vedere *teoria grupurilor* !

— Nu, un *grup* este pentru noi tot o *mulțime*,

finită sau chiar infinită, dar care satisface anumite condiții anume :

1. Există o lege de compoziție, adică *de structură* care depinde de natura elementelor și de o anumită convenție astfel că la fiecare două elemente a și b din mulțime, ori de câte ori se aplică acea lege de compoziție le corespunde un alt element c din aceeași mulțime. Dacă notăm această lege simbolic cu un semn, de pildă $\&$, și luăm elementele a, b în ordinea aceasta și *nu alta*, putem scrie $(a\&b)=c$. Când intervin trei sau mai multe elemente, legea este asociativă, adică $(a\&d)\&c=\&(b\&c)$. Paranteza are rolul doar să arate că operația a fost efectuată și nimic altceva.

2. Există un *element neutru* al grupului, numit și unitate, pe care îl voi nota cu litera „ e ” astfel că, pentru orice element din mulțime să existe relația : $(a\&e) = (e\&a) = a$.

3. Fiecare element a din mulțime admite *elementul invers*, numit și *simetric* : a^{-1} , astfel că $(a\&a^{-1}) = (a^{-1}\&a) = e$.

— Așadar, grupul dumneavoastră este cu totul altceva decât grupul meu de oameni ! Ia să vedem, mulțimea numerelor naturale formează un grup, dacă iau ca lege de compoziție, să zicem *adunarea* ? Trec peste prima condiție care-i îndeplinită, căci $3 + 4 = 7$ și $(3 + 4) + 7 = 3 + (4 + 7)$. Dar elementul neutru ? Ar trebui să fie zero căci $3 + 0 = 0 + 3 = 3$ și pe aceasta nu-l am ! Așadar, mulțimea numerelor naturale nu formează un grup. începe să-mi placă ! E o noțiune destul de pretențioasă, grupul dumneavoastră ! Atunci să consider mulțimea întregilor ! îl am pe zero, dar în schimb nu am numerele inverse, care ar trebui să fie cele negative ! Strașnic ! Pot deci afirma că numai mulțimea numerelor întregi pozitive și negative formează un grup față de adunare ?

— Da, de aceea această mulțime se numește *grup aditiv* și totodată *comutativ* !

— Asta pentru că $2+3=3+2$? Cred că era de la sine înțeles !

— Exact, în acest caz, dar nu este întotdeauna *de la sine înțeles* ! Dacă operația ar fi fost *scăderea*, comutativitatea s-ar mai fi păstrat ?

— Nu, căci $2-3 = -1$ și $3-2 = 1$. Dar cred că în acest caz nici proprietatea de grup nu mai există, fiindcă nici asociativitatea nu-i verificată: $(2-3)-7 = -8$ și $2-(3-7) = 2+4 = 6$!

— Atunci, spuneți-mi, vă rog, dacă am lua ca lege de compoziție înmulțirea, mulțimea numerelor întregi formează un grup multiplicativ ?

— Nu mă iertați deloc ! Văd că toți mă atacați cu înverșunare, parcă v-aș amenința cu bisturiul ! Din două motive, nu ! Mai întâi că nu există inversul vreunui număr în afară de 1 și apoi fiind că inversul lui zero este oo !

— Când ne vom revedea, peste câteva luni, vă vom ruga să ne conduceți dumneavoastră ! Răspunsul acesta implică oferta !

— Cu multă plăcere, numai că deocamdată vă rog să- mi faceți legătura dintre *noțiunea de grup* și cea de *structură matematică*, sau numai cu aceea de *structură algebrică*, dacă vreți. În limbajul meu, consider că pînă acum ați deschis rana, dar nu ați terminat operația și nici nu ați cusut-o la loc. Nu știu cum s-a putut face trecerea de la *obiectivul clasic al algebrei : rezolvarea ecuațiilor*, la cel despre care vorbeați acum : *studiul structurilor algebrice 1*

— Întîi să stabilim ce se înțelege printr-o structură algebrică : cînd avem de-a face cu o mulțime de elemente M și în această mulțime de elemente se stabilește *una sau mai multe legi*, de compoziție între elementele ei, sau între elementele ei și elementele unei alte mulțimi M' deosebite de aceasta, se spune că s-a *definit o structură algebrică* pe mulțimea M .

— Așadar, acum este clar, grupul este de fapt o *structură algebrică*, în care există o singură lege de compoziție între elementele mulțimii M .

— Da, și anume aceasta este *o lege de compoziție internă*. O altă *structură algebrică*, dar

cu *două* legi de compoziție interne, se numește *inel*. Nu intru în amănunte, vă spun numai că există și alte structuri algebrice ca, de pildă, *corp*, *modul* sau *grupuri cu operatori*, *inele cu operatori* etc. Ultimele două structuri cuprind pe lângă legile de compoziție internă și altele, de compoziție externă care leagă elementele din M cu elementele unei alte mulțimi M_x .

— Pătesc și eu ca domnul Jourdain a lui Moliere, numai că eu nu am descoperit că fac proză, ci că, din școala elementară, de cînd am învățat să operez cu numerele, am tot aplicat *legi de compoziție* ! Cu alte cuvinte, constat că noțiunea de lege de compoziție trebuie să fie una dintre cele mai vechi noțiuni matematice ! Egiptenii, babilonenii, chinezii, hindușii și toate popoarele din vechime, tot legi de compoziție au născocit, numai că și ei, ca și mine săracul, nu s-au gîndit să precizeze acest fapt, adică să le dea o justificare, ci le-au folosit în mod intuitiv !

— Aveți dreptate, dragă doctore, și cu această ocazie să ne întoarcem iar la greci, ca din nou să ne exprimăm admirația față de *darul lor de a gîndi*, de a despica firul în patru !

— Numai că, de data aceasta, admirația dumnevoastră, stimate profesore, este fără de obiect, fiindcă grecii nu au dat nici o atenție calculului algebric. Euclid a înglobat rezolvarea ecuațiilor de gradul I și II în geometrie și a *stabilit* soluțiile lor pe cale geometrică. Din cauza aceasta, grecii nici nu au putut considera operația înmulțirii ca pe o *lege de compoziție*, căci pentru ei produsul dintre două lungimi nu mai era o lungime, ci o arie ! De-abia Diofant a introdus regulile de calcul transmise de la egipteni și babiloneni, dar asta s-a întîmplat cînd marii matematicieni greci trecuseră de mult în lumea cealaltă ! Abia prin matematicienii italieni din secolul al XVI-lea algebra cunoaște o adevărată dezvoltare, anume după ce ei au reușit să găsească soluțiile generale, prin radicali, ale ecuațiilor de gradul trei și patru. Mai

târziu, prin Vieteși Descartes s-au perfecționat și notațiile algebrice și, în fine, prin Gauss și Lagrange se impune în Algebră și noțiunea de lege de compoziție, care s-a desprins din cercetările întreprinse de ei și de alți matematicieni în legătură cu rezolvarea prin radicali a ecuațiilor algebrice de gradul cinci și mai mare decât cinci. Or, raționamentele care au stabilit condițiile de rezolvare ale unei ecuații algebrice prin radicali au impus să se asocieze la ecuația cercetată și un *anumit grup* de substituții format din rădăcinile și coeficienții ei. Astfel, s-a făcut legătura dintre rezolvarea ecuațiilor și teoria grupurilor, iar mai departe lucrurile s-au dezvoltat de la sine ! Teoria formelor algebrice, studiul abstract al legilor de compoziție au lărgit noțiunea de algebră și s-a ajuns la algebra abstractă, la logica simbolică. În rezumat, putem spune că obiectul principal al algebrei moderne este *studiul structurilor*, adică a familiilor de relații dintre elementele unei mulțimi M sau între anumite părți ale ei. Aceste relații sînt legile de compunere — interne sau externe — peste tot definite și supuse unor condiții generale. Astfel se determină structurile algebrice de grup, de inel, corp etc.



Georges Bouligand

— Fiindcă vorbim despre grupuri, iată și o privire generală a profesorului Georges Bouligand, pe care am avut bucuria să-l cunosc cînd am luat parte la Congresul internațional de istorie a științelor care s-a ținut în 1968 la Paris și în anul 1981 — la București. Din cartea pe care mi-a dăruit-o atunci, am să vă citesc aceste rînduri deosebite: „Cercetarea celui mai larg cîmp de aplicație a unei propozițiuni introduce în matematică o noțiune deosebit de fecundă, *noțiunea de grup*. Dintr-un caz în care un anumit enunț se verifică, să căutăm a deduce pe toate celelalte. Modificările care conduc de la primul caz (a) la al doilea (b) în care rezultatul se menține ($a * b$), compus cu modificările care conduce de la acest al doilea caz la un al treilea (c), în care rezultatul dăinuie încă ($6 \rightarrow c$) dă o modificare ce duce direct de la primul caz la al treilea ($a * c$). Compu- nînd două modificări, care păstrează fiecare enunțul, se obține iar o modificare din aceeași familie. Pe scurt, spunem că aceste modificări formează un grup”. (33)

— Acum a venit rîndul meu să vă citesc ceva relativ la structură din cartea despre care v-am vorbit a acad. *Gulian* : „Termenul „structură” (sistem) este astăzi o noțiune care a intrat nu numai în terminologia științelor sociale și a științelor naturii, dar și în limbajul curent. Această largă folosire nu poate fi numai un simptom de modă, ci exprimă și o necesitate”. (34, p. 6) Mai departe, iată o relatare extrem de curioasă : „într-o foarte recentă lucrare de sinteză etnologică se afirmă : — O definiție a conceptului de structură, care să cuprindă toate definițiile particulare nu există. Recenzînd cele patruzeci și unu de sinonime pe care le-a aflat, *Oppitz* constată că sub același cuvînt „structură” se pot întîlni sensuri indiscutabil divergente. Evantaiul de sensuri merge, de fapt, de la o accepție mentală, pînă la o accepție obiectivă, realistă”, (p. 13) Și ceva care vă privește direct pe dumneavoastră : „Dacă am ținut să marcăm

antecedentele istorice ale metodei structurale, aceasta nu ne scutește de obligația elementară de a evidenția ce aduce *nou* metoda structurală : *modernizarea* (formalizarea) noțiunilor de structură și model, în consens cu tendința generală a matematicilor, a lingvisticii și a științelor naturii în epoca noastră", (p. 19) Nu vreau să abuzez prea mult de întreruperea ce am făcut-o de la subiectul nostru, așa că trec la cealaltă carte din care citesc doar un pasaj pe care nici nu-l comentez : „Ce trebuie să înțelegem prin structură socială ? Prin ce se deosebesc studiile care se referă la ea de toate descrierile, analizele și teoriile care vizează relațiile sociale, înțelese în sens larg și care se confundă cu obiectul însuși al antropologiei ? Autorii nu sînt de loc de acord asupra conținutului acestei noțiuni, chiar unii dintre cei ce au contribuit la introducerea ei par azi a o regreta. Astfel, în a doua ediție a *Antropologiei* sale, *Kroeber* scrie : — Noțiunea de „structură" nu este, probabil, nimic altceva decît o concesie față de modă : un termen cu sens bine definit începe să exercite deodată o atracție ciudată în decurs de vreo zece ani, cum ar fi, de pildă, cuvîntul *aerodinamic*; lumea începe să-l întrebuințeze fără discernămint, pentru că sună plăcut la ureche. Fără îndoială, o personalitate tipică poate fi considerată din punct de vedere al structurii sale. Dar același lucru este adevărat pentru o articulare fiziologică, pentru un organism, pentru o societate sau o cultură oarecare, pentru un cristal sau o mașină. Orice lucru, cu condiția de a nu fi complet amorf, posedă o structură. Astfel încît se pare că termenul de „structură" nu adaugă absolut nimic la ceea ce știm atunci cînd îl întrebuințăm, decît o picanterie agreabilă". (35, p. 334) Am terminat, acum putem relua discuția noastră despre *elementele caracteristice ale activității matematice*.

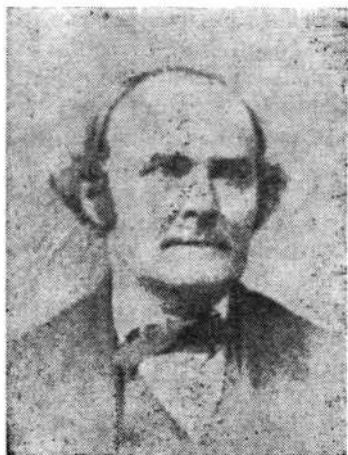
— Da, o vom relua, însă mai înainte aș vrea să mă lămuriți cum de acceptați dumneavoastră, stimate doctore, ba chiar ați ținut să accentuați

tocmai această latură a faptului, anume că o noțiune poate avea felurite interpretări, unele chiar îndoielnice, atunci cînd ea se aplică în diferite domenii ale activității umane, dar nu acceptați aceeași ambiguitate cînd e vorba de domeniul matematicii?

— Știu eu ? Mi-e greu să vă spun, poate că asta ține de structura mea sufletească. Din copilărie am știut că „unu și cu unu fac doi : scurt”, și prin această propoziție mi s-a precizat *imaginea neîndoielii*. Apoi cînd am învățat să demonstrez teoremele din geometrie, știam că aceste demonstrații nu pot duce decît la concluzii *perfect adevărate*, că nu se poate ajunge niciodată la ceva dubios, șovăielnic și de atunci nimic nu mi-a mai zdruncinat încrederea mea în matematică !

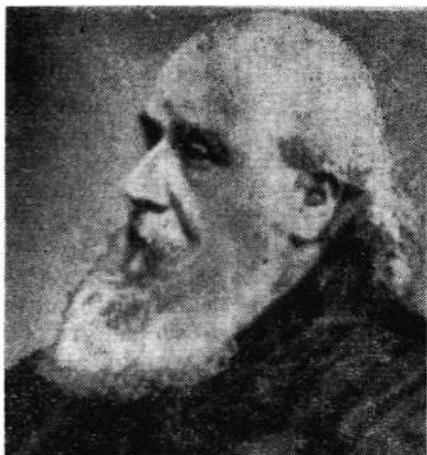
— Da, eu îl înțeleg pe doctorul nostru și la cele ce ne-a spus acum, aș alătura mărturisirea lui Arthur Cayley : „Frumusețea unei teorii matematice, ca și a multor altele, o poți simți, dar nu o poți explica”. Cînd ne vom revedea, aș vrea să vă povestesc despre prietenia matematică dintre Arthur Cayley și James J. Sylvester, care a fost, ca și viața lor, nemaipomenită, îneîntătoare ! Pînă atunci. Nucule, ai cuvîntul !

— Iată ce spune Beth : „în ceea ce privește obiectul *activității matematice*, îmi pare că trebuie să deosebim trei elemente. Obiectul primar al acestei activități este lumea întreagă a experienței noastre. Dar după cum am observat,



Arthur Cayley

activitatea matematică nu se mărginește numai la acest domeniu j ea tinde să considere, de asemenea, și propriile ei rezultate și, în particular, propria ei structură care constituie deci un obiect secundar al activității matematice. Alături de aceste obiecte, primar și secundar, activitatea matematică mai are un obiect *sui generis*, care, după toate aparențele, nu se reduce nici la lumea experienței noastre.



James J. Sylvester

nici la structura matematicii : *infinitul*. Tocmai posesiunea unui obiect *sui generis* garantează autonomia matematicii şi explică tendinţa ei de a se îndepărta de lumea experienţei noastre ; din cauza acestei tendinţe, elementele structurale ale activităţii matematice se ridică din ce în ce mai mult pe primul plan, în dauna obiectului ei primar. Această tendinţă stă la baza dezvoltării moderne a matematicii şi a cercetărilor fundamentelor ; ea este, de asemenea, responsabilă de ruptura cu concepţiile tradiţionale în ceea ce priveşte activitatea matematică şi criza fundamentelor. Este deci foarte natural ca aderenţii raţionalismului tradiţional să interpreteze criza fundamentelor ca un eşec total a acestei tendinţe a activităţii matematice şi să recomande, pentru a ieşi din impas, o revenire la cadrele tradiţionale ale acestei activităţi. Am văzut, totuşi, că matematicienii au găsit alte soluţii". (7, p. 203)

— Cred şi eu ! Cum ar fi posibil să te-ntorci în trecut când s-au schimbat condiţiile de activitate şi prin urmare înseşi problemele care se impun activităţii matematice ?

— Desigur. Dacă ne întoarcem la egipteni şi babiloneni şi ne gândim la uriaşele cantităţi de materiale ce trebuiau depozitate, să zicem în

vederea construirii templelor și a palatelor, acestea cereau metode a fi înregistrate, așadar, iată problemele care se puneau : sisteme de numărare, de măsurare, într-un cuvînt matematica practică.

— La aceste operații trebuie adăugate și acelea, tot de natură practică, de stabilirea și prevederea timpului, cu alte cuvinte astronomia și întocmirea calendarului.

— Că exista o activitate matematică intensă, îndreptată însă numai spre lumea exterioară și de natură pur practică o dovedesc toate papirusurile conținînd probleme matematice, scrise de egipteni, precum și zecile de mii de tăblițe, umplute de calcule, descoperite în Cîmpia Meso- potamiei. În nici una dintre aceste scrieri nu apare vreo aluzie sau vreo încercare, oricît de mică, de abstractizare. Trecerea către o activitate matematică abstractă se dato- rește altei civilizații, celei grecești. Pitagora privea numărul ca elementul primordial al Universului.

— Pitagoreicul Philolaos spunea : „lucrurile nu ar fi clare, nici în raport cu noi și nici în relațiile reciproce dintre ele, dacă n-ar exista numărul și esența lui”.

— Așa-i numai una dintre cugetările lui, dar sînt încă altele, numeroase, pe care eu nu le știu, ca tine, pe dinafară, dragă Toader. Le-am citit cîndva și le-am admirat. O aplicație directă a lor ar fi la armonia muzicală ! însă Platon este acela care a introdus definițiile în matematică și a separat complet activitatea matematică practică de cea teoretică, prin introducerea noțiunilor matematice abstracte.

— Un bun definitiv cîștigat, și de aici înainte matematica pură va coexista alături de cea aplicată, secole de-a rîndul, intensitatea uneia sau alteia dintre aceste aspecte ale activității matematice depinzînd de prefacerile sociale ce au avut loc atunci. Abia în secolul al XVI-lea se produce o schimbare, activitatea matematică luînd o nouă înfățișare. Prin lucrările lui Tartaglia,

Cardan, Viète, Stevin, Napier ș.a. se introduc procedee și tehnici noi de calcul care permit lui Galileu și Kepler descoperirile ce aveau să deschidă calea lui Newton și Huygens. Astfel că, pînă în secolul al XIX-lea, activitatea matematică va rămîne subordonată științelor fizice, tehnicii și industriei și va fi legată de lumea experienței.

— în linii mari da, însă ar fi exagerat să spunem că pînă în secolul al XIX-lea nu s-au făcut și lucrări de matematică pură !

— Bine, nu vreau să intru în amănunte, căci atunci nu am mai termina nici azi, nici mîine, nici poimîine. Desigur că în acest răstimp s-au acumulat datele care să ducă la o nouă izbucnire a activității matematice pure-teoretice și în afară de lumea experiențelor fizice : geometriile neeuclidiene, geometriile cu mai multe dimensiuni, teoria mulțimilor, structurile algebrice, cercetarea fundamentelor matematicii ș.a.m.d.

— Că la sfîrșitul secolului al XIX-lea nu se putea vorbi încă, de pildă, despre o fundamentare riguroasă a Analizei matematice, se știe din faptul că nu era lămurită noțiunea de *mărime continuă*. Pentru numărul real existau atunci mai multe definiții care nu concordau între ele. De pildă, *R. Dedekind* a publicat, în 1872, lucrarea *Continuitatea și numerele iraționale*, în care definea numărul real prin tăietura pe axa numerelor raționale, despre care am vorbit odată, însă această definiție a fost criticată de alți matematicieni. Dar iată și un alt exemplu care arată cît de diferite erau punctele de vedere și în legătură cu conceptul primordial de *număr natural*. Se află într-o scrisoare pe care a trimis-o *R. Dedekind* lui *H. Weber*, în 1888 : „trebuie să-ți mărturisesc că eu consider, pînă în prezent, numărul ordinal, nu pe cel cardinal, ca fiind conceptul inițial de număr... Consider numărul cardinal numai ca o aplicație a celui ordinal și chiar în acest „arithmeticein" al nostru se ajunge la conceptul de „cinci" numai prin conceptul „patru".

Dacă vrem să mergem pe drumul tău — și aş recomanda cu căldură să fie odată parcurs în întregime — aş da totuşi sfatul, ca prin număr (număr cardinal) să nu se înţeleagă însăşi *clasa* (sistemul tuturor sistemelor finite asemenea între ele), ci ceva *nou* (corespunzător acestei clase), pe care spiritul îl creează... Aceasta este aceeaşi problemă ca atunci cînd tu spui că numărul iraţional n-ar fi în genere altceva decît tăietura însăşi, în timp ce eu prefer să creez ceva *nou* (diferit de tăietură) care corespunde tăieturii şi care afirm că generează, produce tăietura... Ceva cu totul asemănător este adevărat şi despre definiţia numărului cardinal ca o clasă : se vor spune multe despre *clasă* (de pildă, se va spune că ea este un sistem cu o infinitate de elemente, anume sistemul tuturor sistemelor asemănătoare), ceea ce desigur nu i s-ar asocia deloc cu plăcere numărului (ca trăsătură principală). Se gîndeşte oare cineva la faptul că numărul 4 este un sistem cu o infinitate de elemente, sau nu va vrea oare să uite cît mai repede acest lucru ? (însă faptul că numărul 4 este copilul numărului 3 şi tatăl numărului 5 va rămîne totdeauna în mintea fiecăruia)". (14, p. 273)

— Foarte frumoasă a fost această scrisoare. Nucule, dar să nu uităm că ne-a mai rămas de discutat şi despre *cel de-al treilea obiect, sui-generis*, cum l-a numit Beth, al activităţii matematice, adică despre *infini*t !

— Eşti mata şmecher, Bădie, dar uiţi că eu ţi-s nepot ! Parcă nu ştiu eu de ce te grăbeşti ? Ai mata ceva despre infinit în *Poincare* şi tare nu mai ai răbdare ! Parcă nu am băgat de seamă cum răsfoiai *Dernibres Pensees* ? Numai că, mai este şi profesorul meu aici, care desigur că are să ne spună ceva despre felul cum a văzut Platon problema infinitului şi cred că are întîietate ! îl amintesc pe Platon, fiindcă de Aristotel ne-ai vorbit !

— Vedeţi ce înseamnă să fi avut elevi buni ?

— Vedem ! Poftim spune ce-ți stă pe inimă !

— Nu-mi stă nimic pe inimă, dar, ca să-i fac batirul lui Nucu, aş putea aminti că Platon a fost şi el preocupat de această noţiune a infinitului şi o exprima, desigur mai puţin precis decît Aristotel, dar oricum înaintea lui, prin expresia „mai mult sau mai puţin”, adică printr-o formulă care să dea impresia de *continuă mişcare*, fără ca să devină niciodată „cît”, care ar fi însemnat că a *încetat mişcarea* şi *se intră în repaus*. (14, p. 102) Natural că şi Platon avea în vedere tot *infinitul potenţial*, cum o va face şi Aristotel. Dar ca să nu mă ia băiatul acesta peste picior cu preferinţele mele pentru antici, am să vă citesc din caietul meu cîteva rînduri pe care le-am notat din cartea academicianului Octav Onicescu, despre care am mai vorbit: „Eliminarea completă a infinitului din matematici nu a reuşit... pentru că infinitul joacă un rol esenţial în procesul constituirii obiectelor, cu toată aparenţa paradoxală a acestei afirmaţii. Fiecare dintre experienţele noastre are loc între frontiere finite. Dar, ceea ce numim *experienţă*, în general, nu reprezintă un număr limitat, închis, rigid, de experienţe determinate ; ea reprezintă toate experienţele trăite efectiv de noi ca şi pe acelea pe care le cunoaştem prin intermediul altor persoane şi participă, de asemenea, chiar dacă cu un



Octav

sentiment vag, la experiențele viitoare. Astfel *înțeleasă*, experiența nu neagă infinitul, ci este obligată să țină cont de el. Experiența omenească îi conferă infinitului, deși nu-l înțelege, un loc esențial". (15, p. 95}

— Am pus eu ochii pe caietul dumneavoastră, stimate profesore ! Mi-ar plăcea să-l citesc.

— Poftim, vi-l împrumut și când îl veți termina vă voi da și altele, că a fost o pasiune a mea din tinerețe : să-mi notez fraze frumos scrise. Și asta spre deosebire de prietenul meu care nu notează, dar ține minte cartea din care a citit ceva frumos și, nu exagerez dacă spun, chiar și pagina !

— Ba, să avem iertare, cred că exagerezi. Nu mi-ai auzit nepotul ? Spunea că răsfoiam *Dernieres Pensees* și avea dreptate. Știam eu că era acolo o chestie potrivită pentru problema noastră, dar nu o găseam. Iată-o : „printre matematicieni există două tendințe opuse în modul de a considera infinitul. Pentru unii, infinitul derivă din finit, există un infinit pentru că există o infinitate de lucruri finite posibile : pentru alții, infinitul preexistă finitului și finitul se obține tăind o bucățică din infinit... pentru primii o mulțime se constituie prin adăugire succesivă de obiecte noi și se pot construi obiecte noi prin combinarea celor vechi, apoi împreună cu acestea alte obiecte și mai noi, și dacă mulțimea devine infinită, este pentru că nu există nici o rațiune ca operația să se termine. Pentru ceilalți, din contra, se pornește de la o mulțime în care se găsesc obiecte preexistente, care apar la început confuze, dar treptat, unele dintre ele încep prin a fi recunoscute pentru că li se lipsesc etichete și sînt așezate în sertare, dar obiectele sînt anterioare etichetelor și mulțimea ar exista chiar dacă nu ar fi cine să le claseze". (10, p. 144 și 1-48)

Desigur că acestea-s numai o mică parte din gândurile lui Poincare îndreptate spre infinit. Și, desigur, nu s-au arătat toate la fel de rezistente în fața viitorului. Iată, de pildă, o întrebare pe care am considerat-o mulți ani, fără de cusur și chiar am

zăbovit asupra ei cu înșeintare. Dar mai bine să v-o citesc întîi și apoi să vă spun ce a fost mai departe : „Este posibil”, se întrebă Poincare, „să raționezi asupra obiectelor care nu se pot defini printr-un număr finit de cuvinte ? Este oare posibil să vorbești despre ele, știind despre ce este vorba și pronunțînd altceva decît

cuvinte goale ? Sau, din contra, trebuie să le privim ca imposibile ? Cît despre mine, nu ezit să răspund că este pură zădărniciie. Toate obiectele pe care le considerăm sînt sau definite printr-un număr finit de cuvinte, sau nu pot fi decît imperfect determinate și vor rămîne nediferențiate de o mulțime de alte obiecte” (p. 132) Că nu aceasta era și părerea *Cantorienilor*, ne-o arată tot Poincare, mai departe, în articolul următor : „Cantorienii nu vor să admită aceasta ; un om oricît de vorbăreț ar fi nu va pronunța niciodată în viața lui mai mult decît un miliard de cuvinte ; înseamnă că trebuie să excludem din știință obiectele a căror definiție conține un miliard și unu de cuvinte ? Și dacă nu le excludem, de ce le-am exclude pe acelea care nu pot fi definite decît printr-un număr infinit de cuvinte, odată ce construcția unora ca și a celorlalte este deasupra posibilităților omenești ?” (p. 146) Și acum surpriza : Nu de mult am găsit recenzată în „Mathematical Rewievs” o carte intitulată *Infinitary Logic*, publicată în 1975, în memoria lui *Carol Karp*, fost profesor la Universitatea din Maryland, care a susținut, în 1959, teza de doctorat cu subiectul: „Limbafe cu expresii infinit de lungi” ! Am găsit acolo și următoarea explicație : „Din punct de vedere metama- tematic, calculul formal bazat pe un limbaj cu expresii de lungimi infinite și avînd demonstrații formale infinit de lungi, nu au nici o valoare. Dar, în ultimii ani s-au observat anumite rezultate algebrice provenite din studiul sistemelor formale... și din acest punct de vedere este profitabil să considerăm *calculul formal infinit*”.

— Este în adevăr o surpriză : *limbaje cu expresii*

in finit de lungi !

— De ce vă mirați, stimate doctore ? Intuiționiștii desigur că vor ignora mai departe asemenea probleme, considerându-le că nu există, dar pentru acei ce încă mai caută o soluție problemei continuului, ea poate fi extrem de interesantă ! Și, în ceea ce-l privește pe Bădia, mă mir că a fost surprins, fiindcă dumnealui a mai întâmpinat și alte cazuri în care *oracolele idolului* au fost dezmințite !

— Ai spus *problema* continuului și nu *ipoteza* continuului ? Eu parcă știam de ipoteza continuului !

— M-am referit acum la *problema continuului*, stimate profesore, fiindcă există amândouă, dar între ele este o deosebire. Anume, așa după cum am văzut, ipoteza continuului exprimă că toate mulțimile nenumărabile de numere reale au puterea continuului și se exprimă prin formula

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Ele se pot compara cu totalitatea punctelor de pe o dreaptă. Însă, spre deosebire de mulțimea numerelor naturale, raționale, sau algebrice, aceste numere reale nu pot fi *ordonate*, în sensul că ele nu pot forma o *mulțime, numă-rabilă*, ci formează o *mulțime continuă* și din cauza aceasta *infinitul actual nu poate fi imaginat*. Hilbert a încercat să demonstreze formula aceasta a lui Cantor, dar demonstrația lui a fost considerată de ceilalți matematicieni numai ca o *încercare* de demonstrație și după cum arată W. Sierpinski în articolul din care am aceste informații (9, p. 130): „există chiar matematicieni care nu cred în posibilitatea de a rezolva problema dacă egalitatea (1) este adevărată sau nu, fără a admite o nouă axiomă”. Și tot el adaugă : „Teoria mulțimilor de puncte ar fi mult simplificată dacă ipoteza continuului ar fi demonstrată. Ipoteza continuului implică, printre altele, existența unei mulțimi bine ordonate, avînd puterea continuului, deci, în cazul

că formula (1) ar fi adevărată, s-ar putea demonstra, fără a mai aplica axioma alegerii, toate teoremele a căror demonstrație se bazează pe existența unei mulțimi bine ordonate formată din toate numerele reale". V-am citat acest fragment numai ca să vă dau ocazia, stimate doctore, să vedeți cât de complicate și totodată subtile sînt numai o parte dintre problemele puse de ipoteza continuului. Și acum, vreau să vă răspund dumneavoastră, dragă profesore, folosind același articol: „Trebuie să facem o deosebire între *ipoteza continuului* și *problema continuului*, care constă în stabilirea locului ocupat de continuu printre *ale fi*, adică să se determine numărul ordinal *a* pentru care $2^a = X_a$. O asemenea poziție a problemei presupune, în mod natural, că puterea continuului este un alef, adică presupune existența unei mulțimi bine ordonate ale puterii continuului. În cazul cînd ipoteza continuului ar fi adevărată, am avea în mod evident $a = l_j$ dar nu-i încă demonstrat că *a* nu este egal cu 2... S-au tras multe consecințe din ipoteza continuului, care nu au dus, niciodată, la vreo contradicție... pe de altă parte, multe propoziții importante, din diverse ramuri ale matematicii nu se pot demonstra, în starea actuală a științei, decît făcînd să intervină *ipoteza continuului*. Se cunosc chiar un anumit număr de propoziții interesante care sînt echivalente cu această ipoteză. Toate acestea justifică viul interes pe care-l are ipoteza continuului", (p. 131)

— Ce captivante au fost toate aceste probleme pe care le-am cunoscut din discuțiile noastre ! Dacă nu s-ar fi întîmplat să mă nimeresc exact în ziua aceea cînd erați cu toții aici, habar n-aș fi avut că pot exista asemenea întrebări și preocupări ! Mai ales teoria mulțimilor, infinitul, faptul că se poate stabili o distincție precisă între o mulțime infinită de numere și o alta infinită, prin aceea că o mulțime infinită poate fi pusă în corespondență biunivocă cu o submulțime strictă a celeilalte... că mulțimea tuturor numerelor pare, sau a tuturor pătratelor

numerelor întregi, poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea tuturor numerelor naturale, pe cînd dacă mulțimile ar fi finite, aceste corespondențe ar părea absurde, drept să vă spun că m-au impresionat profund ! Sînt rezultate care te îndeamnă să te-nchini în fața puterii de gîndire a omului !

— Nu degeaba a spus Hilbert : „Infinitul, nici o întrebare nu a zguduit mai mult spiritul omului". Dar, aș vrea să vă întreb, oare ca să deschizi țeasta unui om și să-i umbli prin creierul lui zdrobit, reparîndu-1 și făcîndu-1 să vadă, sau să audă, sau să vorbească din nou, e mai puțin impresionant ?

— Da, recunosc că și asta este adevărat.

— Trebuia să o recunoașteți, că doar nu degeaba hîtrul academician Moisiș a compus această *vorbă de duh* : „Orice poate fi demonstrat, chiar și adevărul" ! (19, p. 29)

POSTFAȚA

Discuțiile cu privire la fundamentele matematicii au pus, în mod firesc, întrebarea despre esența matematicii. Și, după cum am constatat, matematicienii au dat răspunsuri multe și foarte diferite între ele, din care cauză nu s-a putut ajunge la o concluzie generală și unică asupra naturii și obiectului matematicii, ci doar la precizarea unora dintre aspectele ei. Să ne amintim, de pildă, răspunsul, încîntător ca un poem în proză a lui *F. Gonseih* : „în esența ei, matematica nu-i decît un ansamblu de vederi și de procedee schematice ale spiritului nostru, replică conștientă a activității inconștiente care creează în noi o imagine a lumii și un ansamblu de norme după care noi acționăm și reacționăm. Nu-i un edificiu ancorat undeva într-o absolută soliditate, ci o construcție aeriană care rezistă ca prin minune : cea mai îndrăzneată și neverosimilă aventură a spiritului". (12, p. 240) Răspunsul lui *A. D. Alexandrov* este mai sobru, în schimb atinge problema mai real:

„Matematica are ca obiect formele și relațiile obiective ale realității ; dar, după cum spune *Engels*, pentru a studia aceste forme și relații în forma lor pură, trebuie să le separăm total de conținutul lor, să-l omitem ca pe ceva indiferent. Nu există însă forme și relații fără conținut, formele și relațiile matematice nu pot fi absolut indiferente față de conținut. În consecință matematica, disciplina care prin însăși esența ei tinde să realizeze această separare, tinde să realizeze imposibilul. *Aceasta este contradicția fundamentală din esența însăși a matematicii...* Redarea prin gândire a oricărui fenomen, a oricărui aspect, a oricărui moment al realității îl simplifică, smulgându-l din conexiunea universală a naturii... . *Matematica pură „se neagă” permanent ca matematică pură* : altfel, ea nu poate avea valoare științifică, nu se poate dezvolta, nu poate depăși dificultățile care apar inevitabil în cadrul ei". (32, p. 93) Două răspunsuri opuse, suficiente ca să putem înțelege de ce și rezultatele privind fundamentele matematicii s-au grupat în mai multe categorii, purtând numele de *logicism*, *formalism*, *intuiționism*, etc.

Logicismul, dezvoltat de G. Frege și B. Russell, își trage numele din faptul că a reușit să deducă pe cale logică, pornind numai de la noțiunile din teoria mulțimilor și fără să se bazeze pe vreo axiomă specific matematică, nu numai aritmetica, dar și întreaga matematică. Exprimând termenii aritmetici în limbajul logicii simbolice, logiciștii ar fi reușit să reducă matematica la logică dacă nu s-ar fi descoperit paradoxele din teoria mulțimilor. Aspectul acesta, logicist, al matematicii nu se poate identifica însă cu întregul domeniu matematic fiindcă, deși matematica este logică, ea nu este numai logică, adică o vastă tautologie, ci mai este încă și altceva, altceva care-i permite să se dezvolte și să se depășească mereu și în mod nebanuit. Continuând să se situeze pe această poziție, logiciștii sînt nevoiți să caute noi

argumente prin care ei consideră că ar putea să descopere, în mod asimptotic, care este esența și care-s fundamentele matematicii.

Formalismul se înfățișează ca o altă tentativă de a dezlega taina fundamentelor matematicii. *David Hilbert*, întemeietorul școlii, și-a propus să înlăture orice îndoială cu privire la rigurozitatea raționamentului matematic, prin introducerea unui număr finit de simboluri, pentru a se evita astfel antinomiile din teoria mulțimilor, cu ajutorul cărora să reducă toate teoriile matematice și raționamentele intuitive la operații formale între aceste simboluri lipsite de orice semnificație în afară de definiția și axiomele prin care au fost introduse. El a stabilit astfel o metodă formalizată și pe de-a-ntregul axiomatizată, cunoscută sub numele de *teoria demonstrației*, în care independența și consistența axiomelor era garantată prin analiza *meta-matematică* a sistemelor de simboluri considerate. Dar și aceste încercări nu au dus la succesul sperat căci caracterul finit al raționamentelor metamatematice l-au condus *pe* Kurt Godel la descoperirea că prin metode finite nu se poate stabili necontradicția aritmeticii elementare ! Mai mult chiar, Godel a dovedit că orice sistem axiomatizat este ori incomplet, ori indecidabil. Nici formalismul nu a reușit deci să înlăture din calea sa obstacolele pe care le-a întâlnit, pentru că și el a privit numai către un singur aspect al realității matematice, acela al axiomatizării și a procesului de demonstrație.

Intuiționismul consideră matematica întocmai ca pe o activitate autonomă a spiritului, avînd un caracter sintetic-intuitiv. Admițînd că o propoziție matematică este valabilă numai dacă-și afirmă existența în mod intuitiv sau arătînd o metodă practică prin care să se stabilească sau să se construiască obiectul respectiv, intuiționismul nu permite nici demonstrațiile logice și nici axiomatizarea formalistă. *L. E. J. Brouwer* a pus bazele intuiționismului, anticipat fiind de Immanuel

Kant, care în *Critica rațiunii pure* afirmă că „judecățile matematice sînt toate sintetice și bazate pe intuiție”, de *H. Poincare*, care a adăugat la cele susținute de Kant că „raționamentul matematic are în el însuși un fel de virtute creatoare și prin urmare se deosebește de silogism”, de *L. Kronecker*, care spunea că „ar trebui ca toate rezultatele cercetărilor matematice, oricît de profunde ar fi, să se poată exprima sub forma simplă a proprietăților numerelor naturale”, de *H. Lebesgue* : „A arăta cum se construiește matematica înseamnă a-i studia fundamentele, dar dintr-un punct de vedere care ne scoate dincolo de domeniul logicii”, și mulți alții. *Brouwer* a analizat atît atitudinea logicistică a lui Frege și Russel, cît și procedeele axiomatizării și ale formalizării matematicii aplicate de *Hilbert*, de asemeni și teoria mulțimilor a lui *G. Cantor* și a ajuns la concluzia că logica trebuie să fie separată de matematică; aceste două obiecte fiind legate împreună numai prin limbajul matematic care întovărășește construcțiile logice. Apoi că, prin limbajul său, logica depinde de matematică, în timp ce matematica este independentă de logică și o folosește doar ca un instrument necesar. În privința formalizării, deși există unele puncte de asemănare între raționamentele metamatematice finitiste ale lui Hilbert și tezele finitiste ale intuiționismului — ambele datorită idealismului kantian —, există o deosebire esențială între ele, care l-a condus pe Brouwer la o schemă diferită a formalizării intuitive. Și teoria mulțimilor a fost pe de-a-ntregul condamnată, atît pentru definiția naivă a mulțimilor, cît și pentru introducerea în raționamentul matematic a *infinitului actual*, care a condus la aplicarea fără discernămint a principiului terțiului exclus. În concluzie constată că matematica și-a pierdut astfel contactul cu realitatea gîndirii și ca să-1 recîștige ea trebuie să devină *intuitivă* și *constructivă*, raționamentele ei aplicîndu-se *numai la mulțimi finite de obiecte*.

Aceste și alte observații l-au condus către o nouă logică, intuiționistă, construită pe ipoteza că numai *principiul contradicției este valabil întotdeauna*, pe când *principiul terțiului exclus se aplică numai în cazul mulțimilor finite*. Propozițiile logicii intuiționiste admit trei valori: adevărul, falsul sau indiferența; este, așadar, o *logică trivalentă*. Cercetările au fost continuate de A. Heyting și în ultima vreme de *Everett Bishop*, care a adus elemente noi, dând intuiționismului o largă aplicație în domeniile noi ale matematicii.

Totuși, ca și celelalte două curente discutate mai înainte, intuiționismul s-a mărginit să aprofundeze o anumită față a matematicilor și prin aceasta s-a rupt și el de realitate, rezultatele lui, oricât de interesante ar fi reflectând doar acest singur aspect pe care l-a considerat. *Singura concepție care poate depăși aceste rezultate parțiale ca să se avînte spre culmile înțelegerii depline a realității și a dezvoltării reale ale matematicii este aceea a materialismului dialectic*. Aceasta pentru că, după cum afirmă Alexandrov : „în opoziție cu diversele curente și variante ale idealismului și ale metafizicii, materialismul dialectic consideră matematica — ca și întreaga știință în ansamblul ei — așa cum este, în toată bogăția și complexitatea conexiunilor și dezvoltării ei”. (32, p. 102).

BIBLIOGRAFIE

1. Stere, E., *Istoria filosofiei antice și medievale*, Editura didactică și pedagogică. București, 1976, p. 5.
2. Poincaré, H., *La Science et l'Hypothese*. E. Flammarion, Paris, 1925, p. 9.
3. Poulet, G., *Conștiința critică*. Editura Univers, București, 1979, p. 292.
4. Beth, E.W. et Piaget, J., *Epistimologie mathématique et psychologie*. Press Universitaires de France, Paris, 1961.
5. Poincaré, H., *Science et Methode*. E. Flammarion, Paris, 1927, p. 47.
6. Poincaré, H., *La valeur de la Science*. E. Flammarion, Paris, 1925, p. 12.
7. Beth E.W., *Les Fondements logiques des Mathématiques*. Gauthiers-Vilars, Paris, 1955, p. 16.
8. Dumitriu, A., *Mecanismul logic al matematicilor*. Editura Academiei R.S. România, București, 1968, p. 50.
9. Gonsseth, F., *Les Entretiens de Zilrich sur les Fondements et la Methode des Sciences mathematiques*. S.A. Leemann, Ziirich, 194 1.
10. Poincaré, H., *Dernieres Pensees*, E. Flammarion, Paris; 1933, p. 108.
11. Brunschviieg, L., *Les etapes de la philosophie mathematiques*. Alean, Paris, 1922, p. 425.

12. Gonsseth, F., *Les Fondements des Mathematiques*. A. Blanchard, Paris, 1926, p. V.
13. Korner, Șt., *Introducere in filosofia matematicii*. Editura științifică. București, 1965, p. 206.
14. Becker, O., *Fundamentele matematicii*. Editura științifică. București, 1968, p. 347.
15. Onicescu, O., *Principes de logiques et de philosophie mathematiques*. Editura Academiei R.S. România, București, 1971, p. 105.
16. Beli, E.T., *Les grands mathematiens*, Payot, Paris, 1961, p. 589.
17. Joja, A., *Logiques apophantique et logique symbolique*. Revue Roumaine des Sci. sociales. Sărie Philos. et Logique. T. 16, 1972, 1. p. 83.
18. Newman, J., *The world of mathematics*, voi. III. Simon and Schuster New York, 1956, p. 1857.
19. Moisil, Gr. C., *Știință și umanism*. Editura Junimea, Iași, 1979, p. 64, și 195.
20. Lautman A., *Essai sur l'unité des mathematiques*. Paris, U.E.G., 1977, p. 25.
21. Beth E.W., *The foundations of mathematics*. North-Holland publ. comp. Amsterdam, 1959, p. 21.
22. Reid, C., *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin, 1970, p. 98.
23. Hahn, H., *Logique mathematiques et connaissance de la realite*. Hermann, Paris, 1935, p. 27-34.
24. Dieudonné, J., *Les methodes axiomatiques modernes et les fondements des mathematiques*. în: F. Le Lionnais: *Les grands courants de la pensie mathematiques*, Paris, 1962, p. 543.
25. *Les methodes Jormelles en axiomatiques*. C.N.R.S.

Paris, 1953, p. 53 ;

R. Feys, *La formalisation comme suggestion rigoureuse*.

26. Creangă I. și colectiv. *Introducere în teoria numerelor*. Editura didactică

și pedagogică, București, 1965, p. 427.

27. Heyting, A., *Intuitionism. An Introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1956.

28. Heyting, A., *Constructivity in Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1959.

29. Bishop, E., *Foundations of constructive Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.

30. *The Mathematical Intelligencer*. Springer-Verlag, Berlin, voi. 3, nr. 2, 1981, p. 85.

31. Bourbaki, N., *Element s d'histoire des Mathematiques*. Hermann, Paris, 1969.

32. *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*. Editura științifică. București, 1960, voi. I, pp. 81 — 102.

33. Boullgand, G., *La causalite des theories mathematiques*. Hermann, Paris, 1934, p. 17.

34. Gulian, C.I., *Marxism și structuralism*. Editura politică. București, 1976.

35. Levi-Strauss, Cl., *Antropologie structurală*. Editura politică, București, 1978.

CUPRINS

I	Hodoronc-tronc : filosofie.....	7
---	---------------------------------	---

II	Adincurile se cer scormonite.....	26
III	Spre uluitorul infinit	42
IV	O cale cu hârtoape	73
V	Piatra de încercare.....	103
VI	Ademenit de iluzii.....	125
VII	Alți cutezători semeți.....	157
VIII	Licuricii din adincuri.....	185
	Postfață.....	224
	Bibliografie.....	229

Bun de tipar 13.11.1983. Apărut 1983.
Comanda nr. 2121. Coli de tipar 14,5



Tiparul executat sub comanda nr. 353,
la întreprinderea poligrafică Iași,
str. 7 Noiembrie nr. 49

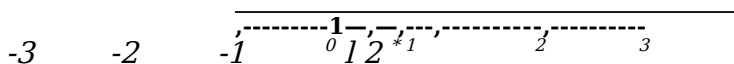


Fig. 1

— Fiindcă ai vorbit de sens, dragă Nucule, de

cel pozitiv și de cel negativ, e bine să atragi atenția că numerele cu abscise negative trebuie așezate la stînga lui zero. Prin urmare, că în această reprezentare a numerelor pe dreaptă vei folosi numerele algebrice pozitive și negative,

— Aveți dreptate, dragul meu profesor. Noi ne mărginim la segmentul $0, 1$ și îl împărțim mai întâi în jumătate și apoi succesiv în alte jumătăți. Se ajunge astfel de la punctele de abscisă 1 la acelea cu abscisele $=0,5$,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,25 \dots$ ș.a.m.d. Continuând diviziunea la nesfârșit între $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{4}$ punctele $\frac{1}{2} = 0,5$ și $\frac{1}{4} = 0,25$, găsim că între $0,5$ și $0,25$

există o infinitate de puncte ale căror abscise vor fi

de forma $0,4123\dots$, $0,3179\dots$ ș.a.m.d. Putem să ne închipuim că întregul segment $0, 1$ este împărțit într-o infinitate de părți infinit de mici. Se obțin astfel punctele ale căror abscise reprezintă toate numerele reale cuprinse între 0 și 1 . Iată un

exemplu de o infinitate de puncte care *nu mai formează o mulțime numărabilă*. Vreau să spun că mulțimea punctelor aflate pe segmentul $0, 1$ este mai mare